

7. FOLGE, 1961, BAND 8, HEFT 5-6

613  
S143  
OF MICHIGAN

ANNALEN NOV 7 1961

DER

PHYSICS  
LIBRARY

# PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren  
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,  
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,  
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 463. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,  
W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL, R. ROMPE,  
R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN      G. RICHTER  
Heidelberg              Berlin



JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 4. September 1961

## Inhalt

A. A. Sokolow, Moskau: Über das Verhalten des Spins von Dirac-Teilchen bei Streuprozessen .....	237
A. Papapetrou, Berlin: Eine einfache Normalform des Gravitationsfeldes erster Näherung .....	260
W. Riezler und H. Schepers, Bonn: Ionisation und Energieverlust von $\alpha$ -Teilchen in verschiedenen Gasen. Mit 6 Abbildungen .....	270
F. Voigt, Jena: Dispersion der komplexen Permeabilität an Lithiumferrit .....	278
W. Herms, Leipzig: Kerninduktionsuntersuchungen an strömenden Proben .....	280
W. Klose, Berlin: Theorie der elektrischen Leitfähigkeit in Si. II. Bereich mittelstarker Felder („warme Elektronen“). Mit 1 Abbildung .....	287
A. S. Kompanejez: Trennung gasförmiger Gemische durch Dampfstrom .....	303
G. Dautcourt, Berlin: Energie, Impuls und Drehimpuls in der allgemeinen Relativitätstheorie .....	309
E.-E. Pippig, Berlin: Druckkoeffizienten und Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes einiger Rhenium-Legierungen. Mit 4 Abbildungen ..	318
J. Ranft, Leipzig: Die Berechnung von $C^{13}$ -H- und H-H-Kernspinkopplungskonstanten von Äthan und Äthylen mit Hilfe von Valenzbindungseigensfunktionen .....	322
H. Bücka und H. H. Nagel, Heidelberg: Über die Lebensdauer des $6^3P_1$ -Terms im Barium I-Spektrum. Mit 1 Abbildung .....	329

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an:

Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7,  
Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftenstitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— zuzüglich Postgebühren (U. S. \$ 8.57 einschließlich Porto).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

# ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE \* BAND 8, HEFT 5-6 \* 1961

## Über das Verhalten des Spins von Dirac-Teilchen bei Streuprozessen

Von A. A. Sokolow

### Inhaltsübersicht

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten der vier Komponenten eines verallgemeinerten Spin-Pseudovektors untersucht, welche mit dem Hamilton-Operator kommutieren. Ferner wird ein Operatorausdruck für einen dreidimensionalen Einheits-Pseudovektor des Spins angegeben. Dieser Operator kommutiert ebenfalls mit dem Hamilton-Operator und in allen Inertialsystemen besitzt er den Betrag 1.

Es wird gezeigt, daß die Richtung des Spin-Pseudovektors unbestimmt ist und faktisch den Drehsinn der zirkularen Polarisation in einer Ebene beschreibt, die senkrecht zu dieser Richtung liegt. Daher verkürzen sich bei einer Lorentz-Transformation nicht die longitudinalen, sondern die transversalen Komponenten des Spin-Pseudovektors.

Im Gegensatz zur Theorie von Lee und Yang und ebenfalls zu Landaus Theorie wird gezeigt, daß sich bei einer Raumspiegelung keinerlei Asymmetrieeigenschaften des Raumes ergeben (auf Grund deren angeblich ein rechts-händiges Teilchen in ein linkshändiges übergeht) und daher bei dieser Transformation die Spiralität, d. h. der Drehsinn der Polarisation relativ zur Impulsrichtung, erhalten bleiben muß und nur die mathematische Form ihrer Beschreibung verändert wird.

Was die Erscheinungen der Paritätsverletzung betrifft, die von Lee und Yang vorausgesagt wurden, so kann man sie einfach auf Grund der Polarisierungseigenschaften der Teilchen erklären.

Am Beispiel der elastischen Streuung wird gezeigt, daß bei der Wechselwirkung von Teilchen mit verschwindender Ruhmasse die Spiralität nur bei vektorieller und pseudovektorieller Kopplung erhalten bleibt.

Da die Verletzung der Parität mit den Polarisierungseigenschaften der Teilchen zusammenhängt, muß sie nicht nur bei Prozessen auftreten, an denen das Neutrino beteiligt ist. Z. B. muß man eine Erscheinung, die der Paritätsverletzung ähnlich ist, bei der Untersuchung der Polarisierungseigenschaften der Synchrotronstrahlung beobachten können, sowie bei der Streuung von longitudinalen polarisierten Photonen an polarisierten Elektronen und bei den in der Bremsstrahlung emittierten longitudinal polarisierten Elektronen.

### § 1. Allgemeine Eigenschaften des Spin-Pseudovektors

Im Zusammenhang mit der Entdeckung der Nichterhaltung der Parität haben die Fragen, die mit dem Spin und den Polarisierungseigenschaften von Dirac-Teilchen zusammenhängen, große Bedeutung erlangt.

Das Verhalten des Spins von freien Dirac-Teilchen in der zweiten Quantelung wurde von uns bereits in einer Arbeit aus dem Jahre 1945<sup>1)</sup> untersucht (s. auch <sup>2</sup>)).

In dieser Arbeit wurde gezeigt, daß der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = c(\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}) + \varrho_3 m_0 c^2, \quad (1)$$

( $\vec{\alpha} = \varrho_1 \vec{\sigma}$ ;  $\varrho_{1,2,3}$  und  $\sigma_{1,2,3}$  bedeuten die bekannten vierreihigen Dirac-Matrizen) mit der longitudinalen Komponente des Spins

$$\hat{S} = \frac{1}{|\hat{\vec{p}}|} (\vec{\sigma} \cdot \hat{\vec{p}}) \quad (2)$$

kommutiert und daher die Wellenfunktion außer der Dirac-Gleichung

$$(\varepsilon |E| - \hat{H}) \psi = 0, \quad (3)$$

mit

$$|E| = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4},$$

noch der Nebenbedingung

$$(s - \hat{S}) \psi = 0, \quad (3a)$$

unterworfen werden kann. Die allgemeine Lösung von (3) und (3a) hat die Form

$$\psi(\vec{r}, t) = L^{-3/2} \sum_{\vec{k}, s, \varepsilon} C_{s, \varepsilon}(\vec{k}) b_{s, \varepsilon}(\vec{k}) e^{-i c \varepsilon K t + i \vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (4)$$

wobei

$$|E| = c \hbar K = c \hbar \sqrt{k^2 + k_0^2}, \quad k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}, \quad \text{und} \quad b_{s, \varepsilon}(\vec{k}) =$$

vierreihige Matrizen sind und  $C_{s, \varepsilon}$  eine Zahl bedeutet. Hier ist die allgemeine Lösung in eine Summe von Partiallösungen zerlegt worden, die nicht nur durch die verschiedenen Impulse  $\vec{p} = \hbar \vec{k}$  sowie durch die Vorzeichen der Energie  $\varepsilon = \pm 1$ , sondern auch durch die verschiedenen longitudinalen Komponenten des Spins, d. h. die Projektionen des Spins auf die Bewegungsrichtung charakterisiert werden.

Versuchen wir nun mit Hilfe des Ausdrucks (4) nicht nur die longitudinale, sondern auch die transversale Komponente des Spins zu untersuchen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Untersuchung der Eigenlösung (d. h. der Lösung mit gegebenen Werten  $\vec{k}$ ,  $\varepsilon$ ,  $s$ ) die  $z$ -Achse in Richtung des Impulses  $\hbar \vec{k}$  legen. Ferner sieht man leicht, daß nur die longitudinale Komponente  $\sigma_3$  mit dem Hamilton-Operator vertauschbar ist, die transversalen Komponenten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  jedoch nicht.

Dieses Resultat erscheint ganz natürlich, da der Gesamtdrehimpuls

$$\hat{\vec{J}} = [\vec{r} \cdot \hat{\vec{p}}] + \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma} \quad (5)$$

<sup>1)</sup> A. Sokolow, J. Physic. USSR 9, 363 (1945).

<sup>2)</sup> A. Sokolow, „Quantenelektrodynamik“, Berlin 1957; см. также А. Соколов „Введение в квантовую электродинамику“ физматгиз 1958 Москва.

eine Konstante der Bewegung ist, wobei nur die longitudinale Komponente des Bahndrehimpulses, d. h. die Größe  $[\vec{r} \vec{p}]_p$  verschwindet.

Man kann jedoch den Begriff des Spins so verallgemeinern, daß der Erhaltungssatz auch ohne Benutzung des Bahn-Dreh-Impulses erfüllt ist.

In Analogie zu dem Ausdruck für den Operator des Energieimpulstensors

$$\hat{T}_{\mu\nu} = -\frac{c}{2} (\hat{p}_\mu \alpha_\nu + \alpha_\mu \hat{p}_\nu)^3, \quad (6)$$

dessen Erhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \psi^+ \hat{T}_{\mu\nu} \psi = 0$$

die Erhaltung des Viererimpulses des Feldes

$$P_\mu = \frac{i'}{c} \int \psi^+ \hat{T}_{\mu 4} \psi d^3 x \quad (7)$$

nach sich zieht, führen wir den Pseudotensor des verallgemeinerten Spins

$$\hat{M}_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\beta\lambda} \epsilon_{\nu\alpha\beta\varrho} (\hat{p}_\lambda \tilde{\sigma}_\varrho + \tilde{\sigma}_\varrho \hat{p}_\lambda) \quad (8)$$

ein, welcher ebenfalls einem Erhaltungssatz

$$\frac{\partial \psi^+ \hat{M}_{\mu\nu} \psi}{\partial x_\nu} = 0 \quad (9)$$

genügt. Damit finden wir für die Komponenten, welche proportional den Viererkomponenten des Spinvektors eines Feldes von Dirac-Teilchen sind, den Ausdruck

$$S_\mu = \frac{i'}{\hbar} \int \psi^+ \hat{M}_{\mu 4} \psi d^3 x. \quad (10)$$

Aus den Formeln (6) und (8) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{i'}{c} \hat{T}_{\mu 4} &= \hat{p}_\mu, & \hat{p} &= \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}, & c \hat{p}_t &= -i' c \hat{p}_4 = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \\ \hat{S}_\mu &= \frac{i'}{\hbar} \hat{M}_{\mu 4} & & & &= \frac{1}{2c\hbar} (\hat{H} \tilde{\sigma}_\mu + \tilde{\sigma}_\mu \hat{H}), \end{aligned} \quad (11)$$

wobei

$$\tilde{\sigma}_{1,2,3} = \vec{\sigma}, \tilde{\sigma}_t = -i' \tilde{\sigma}_4 = \varrho_1.$$

3) Wir haben die Ausdrücke (6) und (8) in bezug auf die Funktionen  $\psi$  und  $\psi^+$  symmetrisch geschrieben. Dann muß der Operator  $\hat{p}_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ , der vor den Matrizen steht, auf die Wellenfunktion  $\psi^+$  nach der bekannten Vorschrift

$$\psi^+ \hat{p}_\mu = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^+}{\partial x_\mu}$$

wirken.

\* Hierin ist  $i'$  eine zweite imaginäre Einheit, wobei  $i'^2 = i^2 = -1$  und gleichzeitig  $i^+ = -i$ ,  $i'^+ = i'$ . Diese Einheit ist zu dem Zweck eingeführt worden, daß die kovarianten und kontravarianten Vektorkomponenten identisch werden. In unserem Falle sind die Komponenten des Viererimpulses des Feldes gleich

$$P_{1,2,3} = P, P_4 = i' P_t = \frac{i'}{c} E,$$

wobei  $E$  die Gesamtenergie des Feldes ist.

Aus (11) erhalten wir für die Komponenten des verallgemeinerten Spinvektors folgende Ausdrücke:

$$\hat{S} = k_0 \varrho_3 \vec{\sigma} + \varrho_1 \vec{k}, \quad \hat{S}_t = (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}), \quad (12)$$

welche, wie man leicht verifiziert, mit dem Hamilton-Operator kommutieren.

Für die weiteren Untersuchungen verwenden wir die Partiellösungen der Gleichung (4), die zu den Werten  $\vec{k}, s, \varepsilon$  gehören. Dann ist

$$\psi = L^{-3/2} C_{ss}(\vec{k}) b_{ss}(\vec{k}) e^{-icsKt + i\vec{k}\vec{r}}, \quad (13)$$

wobei

$$b_{ss}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_1 B_1 \\ A_1 B_2 \\ A_2 B_1 \\ A_2 B_2 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \sqrt{1 + \varepsilon \frac{k_0}{K}} \\ A_2 = \varepsilon s \sqrt{1 - \varepsilon \frac{k_0}{K}} \\ B_1 = s e^{-i \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{1 + s \cos \theta}{2}}, \quad B_2 = e^{i \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{1 - s \cos \theta}{2}} \quad (14)$$

und  $\theta$  und  $\varphi$  die Richtung des Vektors  $\vec{k}$  in Polarkoordinaten definieren.

Legen wir noch die  $z$ -Achse in Richtung des Vektors  $\vec{k}$ , beschränken uns auf positive Energien ( $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z = k$ ,  $\theta = \varphi = 0$ ) und summieren über  $s$ , dann erhalten wir explizit ( $\varepsilon = 1$ ):

$$\psi = 2^{-1/2} L^{-3/2} \left[ C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \frac{k_0}{K}} \\ 0 \\ \sqrt{1 - \frac{k_0}{K}} \\ 0 \end{pmatrix} + C_{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 + \frac{k_0}{K}} \\ 0 \\ \sqrt{1 - \frac{k_0}{K}} \end{pmatrix} \right] e^{-icKt + ikz}. \quad (15)$$

Aus der Normierungsbedingung

$$\int \psi^+ \psi d^3 x = 1 \quad (16)$$

finden wir, daß

$$C_1^+ C_1 + C_{-1}^+ C_{-1} = 1. \quad (17)$$

Setzen wir (13) in die Gleichung (7) und (10) ein und verwenden die Normierungsbedingung (17), so finden wir <sup>5)</sup> <sup>6)</sup>:

$$P_x = P_y = 0, \quad P_z = \hbar k, \quad c P_t = E = c \hbar K \quad (18)$$

$$S_x = k_0 s_1^0, \quad S_y = k_0 s_2^0, \quad S_z = K s_3^0, \quad S_t = K s_3^0, \quad (19)$$

wobei  $\vec{s}^0$  der Dreier-Einheitsvektor des verallgemeinerten Spins ist mit den Komponenten

$$s_1^0 = C_{-1}^+ C_1 + C_1^+ C_{-1}, \quad s_2^0 = i (C_1^+ C_1 - C_1^+ C_{-1}), \quad s_3^0 = C_1^+ C_1 - C_{-1}^+ C_{-1}. \quad (20)$$

<sup>5)</sup> А. А. Соколов, И. М. Тернов и Ю. М. Лоскутов, ЖЭТФ, **36**, 930 (1959); s. auch Ann. Physik **5**, 241 (1960).

<sup>6)</sup> А. А. Соколов и М. М. Колесникова, ЖЭТФ, **38**, 1778 (1960).

Man muß hervorheben, daß für den Fall einer freien Bewegung dieser Dreier-Einheitsvektor sich aus den Eigenwerten des folgenden Operators<sup>6)</sup> zusammensetzt:

$$\vec{\sigma}^0 = \vec{k}^0 (\vec{\sigma} \vec{k}^0) + \varrho_3 (\vec{\sigma} - \vec{k}^0 (\vec{\sigma} \vec{k}^0)), \quad (21)$$

dessen Quadrat in allen Inertialsystemen gleich eins ist. Da der letzte Operator eine Linearkombination der Operatoren  $\hat{S}_\mu$  (s. (12)) ist:

$$\vec{\sigma}^0 = \frac{\vec{k} \hat{S}_t}{k^2} + \frac{[\vec{k} [\vec{S} \vec{k}]]}{k_0 k^2}, \quad (21a)$$

muß er ebenfalls mit dem Hamilton-Operator vertauschbar sein.

Daher können wir als verallgemeinerte Form der Nebenbedingung (3a) für eine beliebige Richtung des Spins, die durch den Einheitsvektor  $\vec{\sigma}^0$  angegeben wird, folgende Gleichung auffassen:

$$(\hat{p}^2 - (\vec{\sigma}^0 \hat{p}) (\hat{p} \vec{\sigma}^0)) (1 - \varrho_3) - \varrho_3 (\vec{\sigma}^0 \hat{p}) \hat{p}^2 \psi = 0. \quad (22)$$

Daraus erhalten wir, wenn der Einheitsvektor parallel oder antiparallel zum Impuls  $\vec{p}$  ist, die Gleichung (3a).

Auf den ersten Blick mag es seltsam erscheinen, daß wir nicht nur eine longitudinale Komponente des Spin-Pseudovektors, die mit dem Hamilton-Operator kommutiert, sondern auch transversale definieren können, die eigentlich mit dem Hamilton-Operator nicht vertauschbar sein sollten. Zur Aufklärung dieser Frage untersuchen wir die longitudinalen und transversalen Komponenten des Operators (21).

Für die longitudinale Komponente (der Impulsvektor liegt in  $z$ -Richtung) finden wir

$$\sigma_3^0 = \sigma_3. \quad (23)$$

Für die transversalen Komponenten ergibt sich

$$\sigma_1^0 = \varrho_3 \sigma_1, \quad \sigma_2^0 = \varrho_3 \sigma_2. \quad (23a)$$

Man zeigt leicht, daß alle diese Größen mit dem Hamilton-Operator vertauschbar sind, wobei, da  $\sigma_3^0$  gleich der longitudinalen Komponente des Spins  $\sigma_3$  ist, die Größen  $\sigma_1^0 = \varrho_3 \sigma_1$  und  $\sigma_2^0 = \varrho_3 \sigma_2$  gleich den räumlichen Komponenten des Tensors des magnetischen Eigenmoments sind:

$$\alpha_{\mu\nu} = \begin{cases} i \alpha_\mu \varrho_3 \alpha_\nu & \text{für } \mu \neq \nu \\ 0 & \text{für } \mu = \nu, \end{cases} \quad (24)$$

wobei

$$\alpha_{12} = \varrho_3 \sigma_3, \quad \alpha_{23} = \sigma_3 \varrho_1, \quad \alpha_{14} = i' \varrho_2 \sigma_1.$$

So erweist sich der Spin als eine Kombination aus der longitudinalen Spin-Komponente und den transversalen Komponenten des magnetischen Eigenmoments, die bestimmte Forderungen der relativistischen Kovarianz erfüllt und mit dem Hamilton-Operator vertauschbar ist.

Aus den Formeln (18) und (19) folgt, daß der Impulsvektor ein zeitartiger Vierervektor ist:

$$P_t^2 - P^2 = \hbar^2 (K^2 - k^2) = \hbar^2 k_0^2, \quad (25)$$

während der Pseudovektor des verallgemeinerten Spins raumartig ist,

$$S^2 - S_t^2 = k_0^2 \quad (26)$$

und orthogonal zum Impulsvektor

$$(\vec{S} \cdot \vec{P}) - S_t P_t = 0. \quad (27)$$

Außerdem muß man bemerken, daß, obwohl alle drei Komponenten des Vektors  $\vec{S}$  nicht von der Zeit abhängen (da sie einem Erhaltungssatz genügen, verschwinden die gemischten Glieder, die der Schrödingerschen Zitterbewegung entsprechen), bei gegebenen Amplituden  $C_1$  und  $C_{-1}$  alle drei Komponenten des Operators nicht gleichzeitig Eigenwerte besitzen können. Das führt dazu, daß in Formel (20) die Spin-Amplituden  $C_s$  explizit eingehen und damit hängt auch der Umstand zusammen, daß die Komponenten des Operators  $\vec{\sigma}^0$  (s. (22) und (23)) nicht miteinander vertauschbar sind.

Der Impuls des Feldes  $P_\mu$  (s. Formel (18)) hängt nicht von diesen Amplituden ab und daher kommutieren die Operatoren  $\hat{p}_\mu$  miteinander.

Die Richtung des Spins wird durch das Verhältnis der Koeffizienten  $C_1$  und  $C_{-1}$  bestimmt. Setzt man z. B.  $C_1 = 1$  und  $C_{-1} = 0$ , so erhält man  $s_3^0 = 1$ ,  $s_2^0 = s_1^0 = 0$ , d. h. der Vektor des verallgemeinerten Spins liegt in Richtung des Impulses, d. h. entlang der Achse  $z$ . Für  $C_1 = 0$  und  $C_{-1} = 1$  findet man  $s_3^0 = -1$ . Für  $C_1 = C_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ergibt sich  $s_3^0 = s_2^0 = 0$  und  $s_1^0 = 1$ , d. h. der Vektor des verallgemeinerten Spins zeigt in  $x$ -Richtung.

Wählen wir den Maßstab für die dreidimensionalen Komponenten des Spinvektors, so, daß für  $s_3^0 = 1$  die longitudinale Komponente ebenfalls gleich 1 ist:  $s_3 = 1$ . Dann erhalten wir, wie aus (19) ersichtlich, für die transversalen Komponenten

$$s_{1,2} = \frac{k_0}{K} s_{1,2}^0. \quad (28)$$

In diesem Falle werden wir die Komponenten des Einheitsvektors  $\vec{s}^0$  als Komponenten des Spin-Pseudovektors  $\vec{s}$  in einem Koordinatensystem, das sich mit dem Teilchen mitbewegt, auffassen. Im Koordinatensystem des Beobachters bleibt die longitudinale Komponente des Spin-Pseudovektors  $\vec{s}$  unverändert ( $s_3 = s_3^0$ ), die transversale hingegen erfährt eine Lorentz-Kontraktion:  $s_{1,2} = \frac{k_0}{K} s_{1,2}^0 = \sqrt{1 - \beta^2} s_{1,2}^0$ . Dabei ist  $c\beta$  die Geschwindigkeit des Teilchens relativ zum Beobachter in Richtung der  $z$ -Achse (s. 5)).

Die Tatsache, daß nur die transversalen, nicht jedoch die longitudinalen Komponenten des Spins eine Lorentz-Kontraktion erfahren, hängt damit zusammen, daß sie sich in bezug auf Lorentz-Transformationen wie Pseudovektoren verhalten. Der Spin-Pseudovektor charakterisiert die zirkulare Polarisation des Teilchens in einer Ebene, die senkrecht auf seiner Bewegungsrichtung steht. Für die longitudinale Komponente des Spins steht diese Ebene senkrecht auf der Bewegungsrichtung, und daher bleibt die Polarisation unverändert. Für die transversalen Komponenten des Spins liegt der Geschwindigkeitsvektor des Teilchens in der Polarisationsebene und daher erfahren diese transversalen Komponenten eine Lorentz-Kontraktion bei dem Übergang von einem Koordinatensystem, in dem das Teilchen ruht, zum System des Beobachters. Der Durchlaufungssinn bleibt, wie stets für einen axialen Vektor, unbestimmt.

## § 2. Das Verhalten des Spins bei Lorentz-Transformation

Es ist notwendig, noch eine weitere Eigenschaft des Spin-Pseudovektors zu betrachten. Da die Vierervektoren des Impulses und des Spins zeitartig bzw. raumartig sind, werden sie bei Lorentz-Transformationen um verschiedene Winkel gedreht.

Wir nehmen an, daß in einem gewissen Inertialsystem diese Vektoren parallel und in  $z$ -Richtung orientiert sind ( $s_3 = 1$ ). Dann können wir beim Übergang zu einem anderen Inertialsystem, welches sich gegen das erste mit der Geschwindigkeit  $V_1 = c\beta_1$  bewegt, und das mit dem Impuls, d. h. der  $z$ -Achse, den Winkel  $\theta$  einschließt, mit Hilfe einer Lorentz-Transformation, die Werte  $\vec{s}'$ ,  $s'_t$  der Komponenten im neuen Koordinatensystem bestimmen.

Aus der Kenntnis des Transformationsgesetzes für die Komponenten  $\vec{s}'$ ,  $s'_t$  können wir die Transformationsformeln für die longitudinalen und transversalen Komponenten des Einheitsvektors des verallgemeinerten Spins herleiten (s. 5<sup>6</sup>6):

$$s'_3 = s_3^0 \cos \gamma + s_1^0 \sin \gamma; \quad s'_1 = s_1^0 \cos \gamma - s_3^0 \sin \gamma; \quad s'_2 = s_2^0, \quad (29)$$

wobei

$$\cos \gamma = \frac{\beta - \beta_1 \cos \theta}{\sqrt{(\beta - \beta_1 \cos \theta)^2 + \beta_1^2(1 - \beta^2) \sin^2 \theta}} \quad (30)$$

$$\sin \gamma = \frac{\beta_1 (1 - \beta^2)^{1/2} \sin \theta}{\sqrt{(\beta - \beta_1 \cos \theta)^2 + \beta_1^2(1 - \beta^2) \sin^2 \theta}},$$

$v = c\beta = c\frac{k}{K}$  ist die Geschwindigkeit des Teilchens im ursprünglichen Koordinatensystem. Setzen wir in der Gleichung (29)  $s_3^0 = 1$ ,  $s_1^0 = s_3^0 = 0$ , so finden wir

$$s'_3 = \cos \gamma < 1, \quad (31)$$

d. h. sind im ursprünglichen Koordinatensystem die Vektoren des Spins und Impulses parallel, so ergibt sich als Resultat einer Lorentz-Transformation im neuen Koordinatensystem ein gewisser Winkel zwischen ihnen. Insbesondere finden wir für  $\theta = 0$

$$\cos \gamma = \frac{\beta - \beta_1}{|\beta - \beta_1|}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß für  $\beta_1 > \beta$ , d. h. in dem Falle, daß die Geschwindigkeit des neuen Koordinatensystems nicht nur parallel zur Geschwindigkeit des Teilchens ist, sondern auch noch größer als dieselbe,  $\cos \gamma = -1$  wird, so daß als Resultat einer derartigen Transformation die ursprünglich parallelen Vektoren die Impulse und Spins antiparallel werden.

Aus (29) erhält man für den Winkel, um den der Spineinheitsvektor in bezug auf den neuen Impuls gedreht ist, den Ausdruck<sup>5)7)</sup>

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\sqrt{1 - s'_3^2}}{s'_3}. \quad (32)$$

Um die Drehung des verallgemeinerten Spin-Vektors zu bestimmen, müssen wir die Gleichung (32) mit dem Faktor

$$\frac{k_0}{K'} = \frac{\sqrt{1 - \beta_1^2} / \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \beta_1 \cos \theta} \quad (33)$$

<sup>7)</sup> G. Ascoli, Z. Physik 150, 407 (1958).

multiplizieren. Zur Bestimmung der Drehung des magnetischen Eigenmoments muß man umgekehrt durch diesen Faktor dividieren.

In dem Fall, daß die Masse des Fermions exakt gleich Null ist, verschwinden die transversalen Komponenten  $s_{1,2}$  des Spin-Pseudovektors (s. (28)). Was die longitudinale Komponente  $s_3$  betrifft, so bleibt sie bei beliebigen Lorentz-Transformationen ungeändert, so daß die Nebenbedingung (s. (3)), die wir den Lösungen der Dirac-Gleichung auferlegt haben, invariant ist. Ist also der Spin des Fermions zu Beginn parallel zur Impulsrichtung, so bleibt er bei beliebigen raumzeitlichen Drehungen<sup>8)</sup> parallel zur jeweiligen Impulsrichtung.

Es muß bemerkt werden, daß das Verschwinden der transversalen Komponente des Spins für  $k_0 = 0$  mit dem Umstand zusammenhängt, daß die entsprechende Fläche, die durch die transversalen Komponenten des Spins charakterisiert wird, infolge der Lorentz-Kontraktion streng auf einen Punkt zusammenschrumpft. Das bedeutet jedoch nicht, daß die transversale Polarisierung des Fermions dabei vollständig verschwindet, wenn sie in einem ursprünglichen Koordinatensystem, welches sich mit dem Teilchen mitbewegt, von Null verschieden war. In diesem Falle entartet nämlich das Gebiet, welches durch den Spin-Vektor repräsentiert wird, zu einer Linie, welche auf die eine oder andere Art charakterisiert werden muß. Es handelt sich jedoch in keinem Falle um ein ausgedehntes Gebiet.

In diesem Falle sind die transversalen Komponenten des magnetischen Eigenmoments des Elektrons von Null verschieden. Nach (23a) und (20) sind sie gleich

$$\mu_{1,2} = s_{1,2}^0. \quad (34)$$

Berechnet man die transversale Komponente des magnetischen Eigenmoments für  $E > 0$ , so erhält man (s. <sup>6)</sup>):

$$\mu_3 = \int \psi^+ \varrho_3 \sigma_3 \psi d^3 x = \frac{k_0}{K} s_3^0. \quad (35)$$

Daraus ist ersichtlich, daß für  $k_0 = 0$  sowohl die longitudinalen als auch die transversalen Komponenten des Spins verschwinden, wobei die transversalen Komponenten für  $k_0 = 0$  wie aus Formel (29) zu ersehen ist, bei Lorentz-Transformationen ihre Größe beibehalten.

### C. Berechnung von Matrixelementen unter Berücksichtigung der Polarisationseffekte (s. <sup>9)</sup>)

Im Hinblick auf das Studium des Einflusses des Spins auf verschiedene Effekte muß man zunächst die Matrixelemente, welche die verschiedenen Spin-Wechselwirkungen charakterisieren, berechnen.

<sup>8)</sup> Das Transformationsgesetz für den Spin läßt sich an Hand des Zerfalls des  $\pi$ -Mesons nachprüfen.

Bekanntlich müssen beim Zerfall des  $\pi$ -Mesons in ein  $\mu$ -Meson und ein Antineutrino im Massenmittelpunktsystem (das  $\pi$ -Meson ruht) sowohl der Spin des Mesons als auch des Antineutrinos streng zum Impuls der entsprechenden Teilchen parallel sein. Beim Übergang zum Laboratoriumssystem, in bezug auf das sich das  $\pi$ -Meson bewegt, ist der Spin des Antineutrinos ebenfalls parallel zu seinem Impuls (die Ruhmasse des Antineutrinos verschwindet), während der Spin des  $\mu$ -Mesons mit seiner Impulsrichtung einen Winkel einschließen muß, der durch die Gleichung (32) gegeben wird, da die Ruhmasse des  $\mu$ -Mesons von Null verschieden ist. Das heißt, im Laboratoriumssystem muß es eine, wenn auch sehr kleine (außer bei großen Geschwindigkeiten), transversale Polarisierung des  $\mu$ -Mesons geben.

<sup>9)</sup> A. A. СОКОЛОВ и М. М. КОЛЕСНИКОВА, ЖЭТФ, 38, 165 (1960).

Bekanntlich gibt es 16 unabhängige Dirac-Matrizen, welche man durch die Matrizen

$$\varrho_\mu = \varrho_{1,2,3}, \varrho_4 = I \quad \text{und} \quad \sigma_\mu = \sigma_{1,2,3}, \sigma_4 = I \quad (36)$$

ausdrücken kann. Man kann jedoch relativistisch kovariante Eigenschaften wesentlich einfacher unter Verwendung der Matrizen  $\gamma$  studieren, die durch Pauli eingeführt worden sind und mit den Matrizen (36) in folgenden Beziehungen stehen:

$$\gamma_n = -i' i \varrho_2 \sigma_n, \quad \gamma_4 = \varrho_3. \quad (37)$$

Für die Untersuchung von Spineffekten ist es jedoch einfacher, alle 16 Dirac-Matrizen als Produkte der Matrizen  $\varrho_\mu$  auszudrücken, da das Verhalten des Spins (besonders im Hinblick auf longitudinale Polarisation) im wesentlichen durch die Matrizen  $\sigma_\nu$  bestimmt wird. Daher werden wir im Folgenden nur die Matrizen (36) benutzen.

Aus den Dirac-Matrizen kann man folgende Kopplungstypen konstruieren:

a) Vektor-Kopplung

$$V_n = \varrho_1 \sigma_n, \quad V_t = \varrho_4 \sigma_4. \quad (38)$$

Dabei ist  $n = 1, 2, 3$  und  $V_n$  der räumliche Anteil der Vektor-Kopplung und  $V_t$  der zeitliche.

b) Pseudovektorielle Kopplung

$$A_n = \varrho_4 \sigma_n, \quad A_t = \varrho_1 \sigma_4. \quad (39)$$

c) Skalare- und pseudoskalare Kopplung

$$S = \varrho_3 \sigma_4, \quad P = \varrho_2 \sigma_4. \quad (40)$$

d) Tensorielle Kopplung

$$T_n = \varrho_3 \sigma_n, \quad T_{tn} = \varrho_2 \sigma_n. \quad (41)$$

Dabei ist  $T_n$  der räumliche Anteil ( $T_1 = T_{23}$  usw.) und  $T_{tn}$  der raumzeitliche Anteil der Tensorkopplung.

Betrachten wir z. B. die elastische Streuung von Fermionen unter der Einwirkung einer Wechselwirkungsenergie  $U$ , welche wir als Produkt eines Spin- und eines Koordinatenanteils schreiben:

$$U = \varrho_\mu \sigma_\nu u(\vec{r}). \quad (42)$$

Diese Methode kann man leicht verallgemeinern zur Untersuchung weiterer Effekte, welche unter Energieänderung vor sich gehen.

Für den effektiven Streuquerschnitt der elastischen Streuung unter Berücksichtigung von Spineffekten, bei der das Elektron aus dem Zustand  $(\vec{k}, s, K)$  in den Zustand  $(\vec{k}', s', K' = K)$  übergeht, erhalten wir den Ausdruck:

$$d\sigma_{s's} = C_{s'}^+(\vec{k}') C_{s'}^-(\vec{k}') \frac{K^2}{4\pi^2 c^2 \hbar^2} |u_{\vec{k}'\vec{k}}|^2 d\Omega, \quad (43)$$

wobei

$$u_{\vec{k}'\vec{k}} = \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} u(\vec{r}) d^3 x$$

ein spinunabhängiges Matrixelement ist. Zur Berechnung der Koeffizienten  $C_{s'}$ , verwenden wir folgenden Ausdruck

$$C_{s'}(\vec{k}') = \sum_s b_{s'}^+(\vec{k}') \varrho_\nu \sigma_\nu b_s(\vec{k}) C_s(\vec{k}). \quad (44)$$

Mit Hilfe von (14) kann man leicht zeigen, daß das Spin-Matrix-Element einer vierreihigen Dirac-Matrix als Produkt zweier unabhängiger Matrixelemente von zweireihigen Pauli-Matrizen dargestellt werden kann.

$$b_s^+(\vec{k}') \varrho_\mu \sigma_\nu b_s(\vec{k}) = \frac{1}{2} \bar{\varrho}_\mu(s', s) \bar{\sigma}_\nu(s', s). \quad (45)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_\mu(s', s) &= (A_1'^+ A_2'^+) \sigma'_\mu \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \\ \bar{\sigma}_\nu(s', s) &= (B_1'^+ B_2'^+) \sigma'_\nu \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (46)$$

und  $\sigma'_\mu$  sind die zweireihigen Pauli-Matrizen  $\sigma'_{1,2,3}, \sigma'_4 = I$ . Liegt im Falle der elastischen Streuung der Vektor  $\vec{k}$  parallel zur  $z$ -Achse und der Vektor  $\vec{k}'$  in der Ebene  $xz$ , so haben wir

$$\begin{pmatrix} \bar{\varrho}_4(s', s) \\ \bar{\varrho}_3(s', s) \\ \bar{\varrho}_2(s', s) \\ \bar{\varrho}_1(s', s) \end{pmatrix} = \frac{1}{K} (1 + s s') \begin{pmatrix} K \\ k_0 \\ 0 \\ k s \end{pmatrix} + \frac{1}{K} (1 - s s') \begin{pmatrix} k_0 \\ K \\ -i s k \\ 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_4(s', s) \\ \bar{\sigma}_3(s', s) \\ \bar{\sigma}_2(s', s) \\ \bar{\sigma}_1(s', s) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + s s') \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ s \cos \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} \\ s \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (1 - s s') \begin{pmatrix} -s \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \\ i s \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Dabei ist  $\theta$  der Streuwinkel, d. h.  $\cos \theta = \frac{(\vec{k} \vec{k}')}{k^2}$ .

Aus diesen Formeln können wir einige wichtige Folgerungen hinsichtlich des Verhaltens des Spins bei Streuprozessen in Abhängigkeit vom Charakter der Wechselwirkung ziehen.

Außerdem erscheinen wir aus der Formel (47), daß in der nichtrelativistischen Näherung  $\frac{k}{K} \rightarrow 0, \frac{k_0}{K} \rightarrow 1$  sich nur für Wechselwirkungen, die proportional zu den Matrizen  $\varrho_4$  und  $\varrho_3$  sind, nichtverschwindende Werte für die effektiven Querschnitte ergeben.

Für diese ist

$$\bar{\varrho}_4(s', s) = \bar{\varrho}_3(s', s) = 1. \quad (49)$$

Betrachten wir als konkretes Beispiel die skalare Kopplung  $S = \varrho_3 \sigma_4$  und die vektorielle  $V_t = \varrho_4 \sigma_4$  (nichtrelativistischer Teil) unter der Voraussetzung, daß Anfangsspin und Anfangsimpuls parallel sind, d. h.  $C_1 = 1, C_{-1} = 0$ .

In diesem Falle finden wir mit Hilfe der Formel (44)

$$C_{s'=-1}(\vec{k}') = \cos \frac{\theta}{2}; \quad C_{s'=-1}(\vec{k}') = -\sin \frac{\theta}{2}, \quad (50)$$

d. h.

$$\begin{aligned}s_3'^0 &= C_1'^+ C_1' - C_{-1}'^+ C_{-1}' = \cos \theta, \\ s_2'^0 &= 0; \quad s_1'^0 = -\sin \theta.\end{aligned}\quad (51)$$

Daraus kann man ersehen, daß in der nichtrelativistischen Näherung der Spin-Vektor für  $S$ - und  $V$ -Wechselwirkungen seine ursprüngliche Richtung beibehält und daher in bezug auf den gestreuten Impuls  $\vec{k}'$  um den gleichen Winkel wie der Anfangsimpuls  $\vec{k}$ , nämlich den Winkel  $\theta$  gedreht ist.

Von besonderem Interesse ist die Untersuchung des anderen Grenzfalls, nämlich der ultrarelativistischen Näherung in der wir  $\frac{k}{K} \rightarrow 1$ ,  $\frac{k_0}{K} \rightarrow 0$  setzen können. In dieser Näherung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\bar{\varrho}_1(s', s) &= \bar{\varrho}_4(s', s) = (1 + s s'), \\ \bar{\varrho}_3(s', s) &= \bar{\varrho}_2(s', s) = (1 - s s').\end{aligned}\quad (52)$$

Daraus ist ersichtlich, daß nur für  $V$ - und  $A$ -Kopplungen, die proportional zu den Matrizen  $\varrho_1$  bzw.  $\varrho_4$  sind, Spin- und Impulsrichtung fest miteinander verknüpft sind. War also vor der Streuung der Spin parallel zum ursprünglichen Impuls, so ist er nach der Streuung ebenfalls parallel zum Impuls des gestreuten Teilchens. Im Falle der Wechselwirkungen  $S$ ,  $T$  und  $P$  hingegen ist die Orientierung des Spins bezüglich des Impulses nach der Streuung verändert<sup>10)</sup>.

Betrachten wir z. B. die Streuung von Elektronen an einem Coulomb-Zentrum mit der Ladung  $e'(\varphi = \frac{Ze'}{r}, \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi)$ , wobei die Wechselwirkungsenergie durch

$$U = e \varphi - \mu \varrho_2(\vec{\sigma} \vec{E}) = (e \varrho_4 \sigma_4 + \mu \varrho_2(\vec{\sigma} \vec{\nabla})) \varphi$$

gegeben ist. Hierin bedeutet  $e$  die elektrische Ladung des Elektrons, sein anomales magnetisches Moment steht zum Bohrschen Magneton  $\mu_0$  in der Beziehung:  $\mu = \mu_0 \frac{\alpha}{2\pi}$ . Setzen wir voraus, daß zu Anfang der Spin des Elektrons parallel zu seinem Impuls ist ( $s_e = 1$ ), so behält er für unrelativistische Energien  $E$  des einfallenden Elektrons ( $E \ll m_0 c^2$ ) seine Orientierung bei, ist also in bezug auf den Impuls nach dem Streuprozeß um den Streuwinkel gedreht.

Andererseits spielt im ultrarelativistischen Fall jedoch bei nicht zu hohen Energien (genauer wenn der Coulomb-Anteil der Streuung größer ist als derjenige, der vom anomalen magnetischen Moment herrührt, d. h. wenn  $m_0 c^2 \leq E \ll \frac{e c \hbar}{\mu} \approx 137 m_0 c^2$ ) die Coulomb-Wechselwirkung, welche proportional zur Matrix  $\varrho_4$  ist, weiterhin die wesentlichere Rolle. Jedoch wird im

<sup>10)</sup> Es ist möglich, daß darauf die Tatsache beruht, daß in der gegenwärtigen Theorie des Neutrinos mit orientiertem Spin nur die  $V$ - und  $A$ -Varianten auftreten, welche eine Kopplung der Spinrichtung an die Impulsrichtung gewährleisten, wobei die Umorientierung des Spins in bezug auf den Impuls ein Übergang des Antineutrinos in einen nicht existierenden Zustand, nämlich einen Zustand mit entgegengesetzter Spinorientierung bedeuten würde. Das scheint ein sehr starkes Argument zugunsten der Verwendung der  $V$ - $A$ -Variante zu sein und befindet sich in Übereinstimmung mit den entsprechenden Argumenten, welche sich aus der Analyse der universellen 4-Fermionen-Wechselwirkung ergeben.

ultrarelativistischen Bereich der Spin des Elektrons in Richtung auf den Impuls des gestreuten Teilchens hin gedreht. Im Bereich höchster Energien  $E \gg 137 m_0 c^2$  überwiegt schließlich die Wechselwirkung, die vom anomalen magnetischen Moment des Elektrons herrührt. Da diese Wechselwirkung proportional zur Matrix  $q_2$  ist, dreht sie infolge ihres überwiegenden Einflusses den Spin entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung. Daher kann die experimentelle Untersuchung des Verhältnisses des Spins bei der Streuung polarisierter Fermionen zur Bestimmung des Charakters der Wechselwirkung führen.

### § 3. Der Spin des Fermions und die Verletzung der Parität

Wenn wir den spontanen Zerfall eines spinlosen Teilchens oder eines Teilchens mit unbestimmter Spinrichtung untersuchen wollen, so können wir zunächst sagen, daß diese Erscheinung räumlich isotrop sein muß, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen mit bestimmten Eigenschaften in einer gewissen Richtung fortfliegt, darf nicht von dieser Richtung abhängen.

Offenbar erscheint es auf den ersten Blick so, daß in dem Fall, daß, wenn das zerfallende Teilchen, z. B. ein Neutron, eine definierte Spin-Richtung hat, was man am besten als Rotation beschreibt (da diese einen realen Prozeß charakterisiert und ihre Beschreibung nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt), wir jetzt keine Isotropie des Zerfalls beobachten, jedoch in jedem Falle eine Spiegelsymmetrie.

Wenn wir dann eine Rotation annehmen, die der Polarisation entspricht und in der  $xy$ -Ebene stattfindet und mit  $\theta$  den Winkel zwischen der Richtung des fortfliegenden Teilchens und der  $z$ -Achse bezeichnen, so müßten wir bei Vorliegen der Spiegelsymmetrie die gleiche Anzahl von fortfliegenden Teilchen unter dem Winkel  $\theta$  und  $\pi - \theta$  beobachten. Die  $z$ -Achse ist so gewählt, daß diese und die Drehung der Zirkularpolarisation der Neutronen eine Rechtsschraube bilden.

Gemäß den theoretischen Voraussagen von Lee und Yang<sup>11)</sup>, welche von den Experimenten aufs beste bestätigt wurden (Versuche von Wu und anderen, Ledermann usw.), ist beim spontanen  $\beta$ -Zerfall von Kernen mit orientierten Spins die Spiegelsymmetrie verletzt. So wird z. B. beim spontanen Zerfall des Neutrons die Abhängigkeit der Zahl der fortfliegenden Elektronen vom Winkel  $\theta$  durch folgenden unsymmetrischen Ausdruck gegeben (Experimente von Telegdi u. a.):

$$w(\theta) = 1 - \alpha \frac{v}{c} \cos \theta, \quad (53)$$

wobei  $\alpha^{\text{exp}} = 0,11 \pm 0,02$  und  $c \beta$  die mittlere Geschwindigkeit der emittierten Elektronen bedeuten.

Lee und Yang brachten völlig richtig die Erscheinung der Verletzung der Parität mit den grundlegenden Eigenschaften des Neutrinos in Zusammenhang. Nach ihrer Theorie unterscheiden sich Neutrino und Antineutrino durch ihre Spiralität bzw. zirkuläre Polarisation.

Nach den gegenwärtigen Vorstellungen muß das Neutrino eine linkshändige, das Antineutrino eine rechtshändige Schraubung besitzen.

<sup>11)</sup> T. Lee, C. Yang, Physic. Rev. **104**, 254 (1956); s. auch Physic. Rev. **105**, 1671 (1957).

Ziehen wir zum Vergleich die Polarisation der Photonen heran, so bedeutet das, daß das Neutrino einem zirkular polarisierten Photon entspricht, und zwar das Neutrino einem linkszirkular polarisierten, das Antineutrino einem rechtszirkular polarisierten Photon.

Wir können jedoch mit Lee und Yang<sup>11)</sup><sup>12)</sup> und auch mit Landau<sup>13)</sup> nicht darin übereinstimmen, daß die Verletzung der Spiegelsymmetrie und die Erscheinung der Paritätsverletzung bedeuten, daß die Gleichung des Neutrinos nicht gegenüber räumlicher Spiegelung invariant ist, wobei Teilchen mit positiver Spiralität in solche mit negativer übergehen.

Wir glauben, daß eine Spiegelung die Inversion des Raumes nur in dem Fall vollständig beschreiben kann, wenn wir nur einen polaren Vektor haben, z. B. den Impuls. In diesem Falle könnte ein senkrecht zu diesem Impuls aufgestellter Spiegel seine Transformation bei Inversion des Raumes beschreiben.

Würden wir jedoch den Spiegel parallel zur Impulsrichtung aufstellen, so würde das Spiegelbild des Impulses nicht seiner Transformation bei Inversion des Raumes entsprechen.

Aus der gleichen Ursache kann ein senkrecht zur Impulsrichtung orientierter Spiegel ebenfalls nicht die Inversion einer anderen realen Bewegung beschreiben, nämlich der zirkularen Polarisation. Diese Rotation findet nämlich in einer zum Spiegel parallelen Ebene statt. Um die Transformation dieser Bewegung zu beschreiben, muß man senkrecht zur Ebene der Rotation einen zweiten Spiegel aufstellen. Dieser Spiegel kehrt zwar den Drehsinn der Rotation um, nicht jedoch die Orientierung des Impulses. Daher muß man die Transformation einer Schraubung, welche durch zwei Bewegungen charakterisiert wird, mit Hilfe zweier Spiegel beschreiben, von denen einer senkrecht, der andere parallel zum Impuls orientiert sein muß. In diesem Falle geht offensichtlich das linkshändige Neutrino in das rechtshändige über. Wir wollen unsere Ideen strenger begründen und werden dazu für das Neutrino eine 4-komponentige Dirac-Gleichung (3) zugrunde legen, ergänzt durch die Nebenbedingung (3a), welche automatisch garantiert, daß die Teilchen eine definierte Spiralität besitzen.

Damit die Spiralität des Neutrinos und Antineutrinos bei Lorentz-Transformationen streng erhalten bleibt, d. h. also Gleichung (3a) invariant ist, müssen wir fordern, daß die Masse des Neutrinos exakt verschwindet.

Wir wollen nun die Analogie zwischen der Spiralität des Neutrinos und der zirkularen Polarisation der Photonen im einzelnen weiter verfolgen<sup>14)</sup>.

Bekanntlich entspricht der zirkularen Polarisation der Photonen die Rotation des elektrischen (oder magnetischen) Feldvektors in einer Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Legen wir den Wellenvektor eines Photons in die Richtung der z-Achse, so liegt der Vektor des elektrischen Feldes

$$\vec{E} = \vec{a} e^{-i\omega t + ikz}, \quad (55)$$

in der *xy*-Ebene. In einem rechtshändigen Koordinatensystem haben wir:

<sup>12)</sup> T. D. Lee, Nobel-Vortrag, 1957 (см. УФН, 66, 79 (1958)).

<sup>13)</sup> L. D. Landau, Nuclear Physics 3, 127 (1957).

<sup>14)</sup> Dabei muß man betonen, daß der Spin des Neutrinos gleich 1/2, der des Photons gleich 1 ist, in Einheiten  $\hbar$ . Dieser Unterschied ist jedoch für unsere Betrachtungen nicht wesentlich.

Im Falle rechtszirkularer Polarisation des Photons (Rechtsschraubung):

$$E_x = -i E_y \quad (56)$$

und für linkszirkulare Polarisation (Linksschraubung):

$$E_x = i E_y. \quad (57)$$

Beim Übergang zu einem linkshändigen Koordinatensystem müssen wir in den vorstehenden Formeln die Größen  $E_x$  und  $E_y$  vertauschen. Ganz analog werden wir ein rechtspolarisiertes Fermion in einem rechtshändigen Koordinatensystem durch folgende Beziehungen zwischen Vektoren charakterisieren:

$$\sigma_1 \psi = -i \sigma_2 \psi. \quad (58)$$

Für ein linkspolarisiertes Teilchen gilt:

$$\sigma_1 \psi = i \sigma_2 \psi. \quad (59)$$

Dabei ist der Fermionenimpuls entlang der  $z$ -Achse gerichtet. Daraus ist ersichtlich, daß wir für ein rechtspolarisiertes Fermion in (15)  $C_1 = 1$ ;  $C_{-1} = 0$  setzen müssen und für ein linkspolarisiertes  $C_1 = 0$ ;  $C_{-1} = 1$ .

Bekanntlich ist die Dirac-Gleichung in bezug auf räumliche Inversion ( $P$ -Transformation), Zeitumkehr ( $T$ -Transformation) und Ladungskonjugation ( $C$ -Transformation) invariant.

Daher wird die Invarianz eines Teilchens mit orientiertem Spin vollständig durch das Verhalten der Nebenbedingung (3a), d. h. des Spin-Pseudovektors bei diesen Transformationen bestimmt. Aus der Nebenbedingung (3a) folgt, daß für Rauminverson

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}, \quad \vec{s} \rightarrow \vec{s}, \quad s \rightarrow -s \quad (60)$$

und für Zeitumkehr

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}, \quad \vec{s} \rightarrow -\vec{s}, \quad s \rightarrow s. \quad (61)$$

Diese Transformationen stimmen mit den entsprechenden Transformationen der Zweikomponententheorie des Neutrinos von Lee und Yang<sup>7)</sup> überein. Lee und Yang<sup>9)</sup> und ebenfalls Landau<sup>11)</sup> deuten sie so, daß bei Rauminverson das rechtshändige Antineutrino in ein linkshändiges übergeht, das es in der Natur nicht gibt. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wurde vorgeschlagen, dieses Paradox auf die Nichtinvarianz der Gleichung des Neutrinos in bezug auf Rauminverson zurückzuführen. Landau sowie Lee und Yang hielten es für notwendig, zugleich mit der  $P$ -Transformation eine  $C$ -Transformation auszuführen, die das Vorzeichen der Ladungen sämtlicher Teilchen umkehrt.

Dann geht bei der kombinierten Inversion (der Transformation  $CP$ ) das rechtshändige Antineutrino in ein wirklich existierendes Teilchen über, nämlich das linkshändige Neutrino.

Wir glauben, daß man irgendwelche inneren Eigenschaften von Teilchen nicht verändern darf mit Hilfe einer einfachen Veränderung der geometrischen Begriffe, mit Hilfe derer ihr raumzeitliches Verhalten beschrieben wird. Aus der von uns entwickelten Theorie der Teilchen mit orientiertem Spin ergibt sich ein etwas anderer Zugang zu der Frage des Verhaltens des Spins bei räumlichen Inversonen<sup>15-19)</sup>.

<sup>15)</sup> A. A. Соколов, ЖЭТФ, **33**, 794 (1957); см. также „Атомная энергия“, **4**, 385 (1958).

<sup>16)</sup> A. Sokolow, Max-Planck-Festschrift, 309 (1958).

<sup>17)</sup> A. Sokolow, Nuclear Physics **9**, 420 (1959).

<sup>18)</sup> A. Sokolow and Yu. M. Loskutov, Ann. Physik **5**, 42 (1959).

<sup>19)</sup> A. Соколов „Вопросы философии“, № **10**, 76 (1959).

Zufolge Gleichung (58) kehrt sich bei einem Übergang von einem rechts-händigen Koordinatensystem zu einem linkshändigen nicht nur der Impuls, sondern auch der Drehsinn um. Daher bleibt die Spinalität (d. h. die Orientierung des realen Drehsinns der Polarisation in bezug auf die Richtung des realen Impulses) bei  $P$ -Transformation erhalten. Es kehrt sich nur die Orientierung des axialen Spinvektors in bezug auf den Impuls um, welche jedoch den realen Prozeß nicht vollständig charakterisiert. Jedoch ergeben sich bei dieser Richtungsänderung für die Charakterisierung des Spins keinerlei Widersprüche, wenn man bedenkt, daß die beiden übereinstimmenden axialen Vektoren  $\vec{s}^{\text{rechts}} = \vec{s}^{\text{links}}$  in einem rechtshändigen und in einem linkshändigen Koordinatensystem verschiedene Rotationen beschreiben.

Schließlich ergibt sich aus dem Verhalten des Spin-Pseudovektors bei Lorentz-Transformationen ganz deutlich, daß die longitudinale Polarisation einer Rotation in einer Ebene entspricht, die senkrecht zur Bewegungsrichtung liegt und daß sie keinerlei Lorentz-Kontraktion erfährt. Daher verändert sich bei einer räumlichen Inversion nur die mathematische Form der Beschreibung der Spinalität<sup>20)</sup>, das rechtshändige Antineutrino bleibt jedoch bei dieser Transformation rechtshändig.

Ebenso muß man die Transformation (61) untersuchen.

Betrachten wir nämlich z. B. die freie Dirac-Gleichung und lassen wir Transformationen mit Spinoramplituhen außer Betracht, da bei diesen Transformationen keine streitigen Fragen auftreten (bei einer  $P$ -Transformation gilt  $\psi \rightarrow \varrho_3 \psi$  und bei einer  $T$ -Transformation  $\psi \rightarrow \varrho_2 \psi$ ). Dann haben wir für die Wellenfunktionen

$$\psi = a(\varepsilon = 1) e^{-i\varepsilon Kt} + a(\varepsilon = -1) e^{i\varepsilon Kt} \quad (62)$$

$$\psi = a^+(\varepsilon = 1) e^{i\varepsilon Kt} + a^+(\varepsilon = -1) e^{-i\varepsilon Kt}. \quad (63)$$

Um das Auftreten negativer Energien in der Theorie der zweiten Quantierung zu beherrschen, muß man die Operatoren  $a$  und  $a^+$  folgendermaßen interpretieren:

$a(\varepsilon = 1)$  und  $a^+(\varepsilon = -1)$  bedeuten Vernichtungsoperatoren von Elektron bzw. Positron, da im Exponenten vor der Zeit ein Minuszeichen steht.

$a(\varepsilon = -1)$  und  $a^+(\varepsilon = 1)$  sind Erzeugungsoperatoren für Positron bzw. Elektron.

Bei Zeitumkehr, d. h. bei Ersetzung von  $t$  durch  $-t$ , muß man, da sich die Vorzeichen in den Exponenten ändern, die Bedeutung der Amplituden  $a$  und  $a^+$  ebenfalls umdeuten und annehmen, daß der Vernichtungsoperator für ein Elektron in einen Erzeugungsoperator für ein Positron übergeht.

$$a(\varepsilon = 1) \rightarrow a(\varepsilon' = -1), \text{ usw.}$$

Im strengen mathematischen Formalismus besagt dies, daß sich bei Zeitumkehr die Lagrange-Funktion der 4-komponentigen Dirac-Theorie wie ein Pseudoskalar verhält. Um ihre Invarianz sicherzustellen, muß man eine weitere Transformation  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  einführen, d. h. Teilchen mit positiver Energie sind wie vor der  $T$ -Transformation die Elektronen.

<sup>20)</sup> Ein rechtshändiges Antineutrino wird in einem rechtshändigen Koordinatensystem durch den Wert  $s = 1$  in einem linkshändigen durch  $s = -1$  charakterisiert.

Die geometrische Zeitumkehr, die im Falle der 2. Quantelung noch durch die Bedingung  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  ergänzt wird, trägt die Bezeichnung Schwingersche oder starke Zeitumkehr. Wir bemerken noch, daß bei der C-Transformation, bei der das Ladungsvorzeichen der Teilchen ( $e \rightarrow -e$ ) geändert wird, zur Erhaltung der anfänglichen Abhängigkeit des Ladungsvorzeichens vom Energievorzeichen noch der Übergang  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  oder

$$a(\varepsilon = 1) \rightarrow a^+(\varepsilon = -1), \quad \psi^+ \rightarrow \alpha_2 \varrho_3 \psi^T,$$

wo  $\psi^T$  — die transponierte Matrix ist, durchgeführt werden muß. Dabei geht dann der Vernichtungsoperator des Elektrons ( $\varepsilon = 1$ ) in den Vernichtungsoperator des Positrons ( $\varepsilon = -1$ ) über. Die  $T' = CT$ -Transformation, bei der  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon$ ,  $\psi^+ \rightarrow \sigma_2 \psi^T$  gilt, wird hingegen als Wignersche oder schwache Zeitumkehr bezeichnet. Hierbei geht der Elektronenvernichtungsoperator in den Elektronenerzeugungsooperator über:  $a(\varepsilon = 1) \rightarrow a^+(\varepsilon = 1)$  usw.

Beim Vorhandensein einer Spiralität geht diese (rechtshändige) infolge der Transformation  $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$  von negativen Zuständen zu positiven Zuständen über und umgekehrt, obwohl bei  $T$ -Transformationen Teilchen mit positiver Energie ihrer Leptonenladung zufolge Neutrinos bleiben.

Daher geht bei  $T$ -Transformationen das linkshändige Neutrino in ein rechtshändiges, d. h. in einen nichtexistierenden Zustand über. Um es in ein rechtshändiges Antineutrino umzuwandeln, muß man das Vorzeichen seiner Ladung umkehren, d. h. eine Ladungskonjugation durchführen. Daher gilt in der Theorie des Neutrinos mit orientiertem Spin

$$P = \text{const}; \quad T' = CT = \text{const}. \quad (64)$$

#### § 4. Erklärung der fundamentalen Erscheinungen der Verletzung der Parität auf Grund der Polarisations-(Spin-)Eigenschaften der Teilchen<sup>21)</sup>

Zuerst wollen wir zeigen, daß die Spiegelasymmetrie, die bei den für die Paritätsverletzung typischen Erscheinungen auftritt, nichts mit irgendwelchen geheimnisvollen Asymmetrien des Raumes zu tun hat, sondern im Raum durch die Teilchen erzeugt wird infolge ihrer Polarisierung.

Betrachten wir z. B. den spontanen Zerfall eines Neutrons mit orientiertem Spin in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino  $n \rightarrow p + e + \nu$ . Ganz allgemein dürfen wir den Spin-Pseudovektor nicht explizit einführen, da seine Richtung nur von bedingter Bedeutung ist.

Orientieren wir das polarisierte Neutron so, daß seine Polarisierung in einem rechtshändigen Koordinatensystem durch eine Rotation eines entsprechenden Vektors von der  $x$ -Achse zur  $y$ -Achse hin charakterisiert wird, während im

<sup>21)</sup> Die Erscheinungen der Paritätsverletzung wurden auf Grund unserer Vorstellungen in der Arbeit<sup>2)</sup><sup>18)</sup> behandelt und in der Arbeit<sup>22)</sup> eingehender untersucht. Die grundlegenden Resultate wurden ebenfalls von anderen Autoren mit Hilfe der Zweikomponententheorie von Lee und Yang erhalten sowie an Hand einer Zweikomponententheorie für beliebige Fermionen, die von Feynman und Gell-Mann (Physic. Rev. **109**, 193, 1958) vorgeschlagen wurde. Alle diese Arbeiten sind wohlbekannt und daher werden sie hier nicht weiter zitiert, sondern es wird die Erscheinung der Paritätsverletzung auf der Grundlage unserer Vorstellungen ausführlicher beleuchtet.

<sup>22)</sup> A. Sokolow, B. Kerimov, Ann. Physik **2**, 46 (1958); s. auch Б. Керимов, Изв. АН СССР, серия физ. **28**, 924, (1959).

durch linkshändigen System diese Drehung umgekehrt verläuft, nämlich von der  $y$ - zur  $x$ -Achse.

Dann muß in Richtung der  $z$ -Achse ein Antineutrino wegfliegen, dessen Polarisation parallel zu der des Neutrons ist, umgekehrt in Richtung der negativen  $z$ -Achse ein Antineutrino mit antiparalleler Polarisation. Darauf beruht die Spiegelsymmetrie der ganzen Erscheinung. Diese hängt ganz offenbar nicht davon ab, ob wir den Zerfallsprozeß in einem rechtshändigen oder in einem linkshändigen Koordinatensystem beschreiben.

Für die strenge mathematische Behandlung dieses Problems müssen wir die Wechselwirkungsenergie in folgender Form schreiben:

$$V^{\text{int.}} = \sum_j G_j (\psi_p^+ O_j \psi_n) (\psi_e^+ O_j \psi_e),$$

wobei  $O_j$  eine der Matrizen ist, die den Charakter der Wechselwirkung bestimmt (s. (38) bis (41)) und  $G_j$  die sogenannte Kopplungskonstante bedeutet.

Beschränken wir unsere Betrachtung auf eine Mischung der  $V$ - $A$ -Varianten, die wie in § 3 gezeigt wurde, einzig die festen Relationen zwischen Spinorientierung und Impulsrichtung garantieren. Wenn das zerfallende Neutron ruht, dann können wir in der Wechselwirkung die unrelativistischen Komponenten einsetzen, die bekanntlich proportional zu den Matrizen  $\varrho_4$  und  $\varrho_3$  sind.

Dann können wir in der Wechselwirkung (64) einsetzen:

a) für die Vektorkopplung

$$G_j = g_V, \quad O_V = I = \varrho_4 \sigma_4,$$

b) für die Pseudovektorkopplung

$$G_j = G_A, \quad O_A = \vec{\sigma} = \varrho_4 \vec{\sigma}.$$

Für die Wellenfunktionen, die in (64) eingehen, müssen wir für die Teilchen, also Neutron, Proton, Elektron  $\varepsilon_n = \varepsilon_p = \varepsilon_e = 1$  setzen und für die Antiteilchen, also für das Antineutrino  $\varepsilon_\nu = -1$ . Außerdem müssen wir über die Spinzustände des Protons  $s_p = \pm 1$  summieren. Für das polarisierte Neutron muß man die Spinvariable in einem Rechtssystem  $s_n = 1$  setzen. Ebenso müssen wir die Spinvariable für das Antineutrino festhalten, welches bekanntlich immer eine Rechtsschraubung besitzt ( $s_\nu = 1$ ) und für das Elektron, für welches beide Polarisorierungsmöglichkeiten gegeben sind ( $s_e = s = \pm 1$ ).

Dann erhalten wir mit Hilfe der Formel (14) folgende Ausdrücke für die Amplituden, die die Polarisationseigenschaften der Elektronen beim Zerfall charakterisieren, wobei schon über die Richtung des fortfliegenden Neutrinos und Protons gemittelt ist:

$$C_s^+ C_s = \frac{N}{4} [(1 + s s') (1 - s \beta) + \sqrt{1 - \beta^2} (1 - s s')] \quad (65)$$

$$\cdot [\sqrt{(1 + s x) (1 + s' x)} a^2 + s s' b^2 \sqrt{(1 - s x) (1 - s' x)}].$$

Dabei ist  $x = \cos \theta$  der  $\cos$  des Winkels, unter dem das Elektron wegfliegt, in bezug auf die  $z$ -Achse,  $N$  ein Normierungsfaktor,  $\beta$  die Geschwindigkeit der wegfliegenden Elektronen,  $s, s' = \pm 1$  sind Größen, die die Spinzustände des Elektrons charakterisieren und schließlich gilt für die Größen  $a^2$  und  $b^2$

$$a^2 = \frac{(G_V + G_A)^2 + 4 G_A^2}{G_V^2}, \quad b^2 = \frac{(G_V - G_A)^2}{G_V^2}. \quad (66)$$

Aus (65) ergeben sich folgende Ausdrücke zur Charakterisierung der Spiegelasymmetrie:

$$\bar{s}_0 = C_1^+ C_1 + C_{-1}^+ C_{-1} = N(a^2 + b^2) \left( 1 - \beta \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cos \theta \right) \quad (67)$$

und für die Polarisation:

$$\bar{s}_0 \bar{s}_3^0 = C_1^+ C_1 - C_{-1}^+ C_{-1} = N(-(a^2 + b^2) \beta + (a^2 - b^2) \cos \theta),$$

$$\bar{s}_0 \bar{s}_1^0 = C_1^+ C_{-1} + C_{-1}^+ C_1 = N \sqrt{1 - \beta^2} (a^2 - b^2) \sin \theta. \quad (67a)$$

Um den Ausdruck für  $s_0$ , der die Spiegelasymmetrie zur Darstellung bringt, mit der Formel (53) in Übereinstimmung zu bringen, muß man  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0,11$  setzen, was ungefähr auf  $G_A = -1,26 G_V$  führt.

Zur Bestimmung des Polarisationsgrades bringen wir (67) und (67a) auf die Form

$$\bar{s}_0 = 2 b^2 N + (a^2 - b^2) N (1 - \beta \cos \theta)$$

$$\bar{s}_0 \bar{s}_3^0 = -2 b^2 \beta N + (a^2 - b^2) N (-\beta + \cos \theta), \quad (68)$$

$$\bar{s}_0 \bar{s}_1^0 = 0 + (a^2 - b^2) N \sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta.$$

Aus diesen Ausdrücken kann man ersehen, daß die  $\beta$ -Teilchen im Mittel teilweise polarisiert sind. Dabei repräsentieren die Glieder proportional  $(a^2 - b^2)$  denjenigen Bruchteil der  $\beta$ -Teilchen, welcher vollständig polarisiert ist. Für diesen gilt folgende Beziehung:

$$(\bar{s}_0 \bar{s}_1^0)^2 + (\bar{s}_0 \bar{s}_3^0)^2 = \bar{s}_0^2.$$

Der Tangens des Winkels, den der Einheitsvektor des Spins mit dem Impuls eines Teilchens einschließt, ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta}{\beta - \cos \theta}. \quad (68a)$$

Für  $\cos \theta = \beta$  verschwindet die longitudinale Komponente des polarisierten Teils des Spins. Für  $\cos \theta < \beta$  ist der Spin entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung und für  $\cos \theta > \beta$  in Richtung der Bewegung orientiert.

Die ersten Glieder der rechten Seite der Formel (68), welche proportional zu  $2 \beta^2$  sind, beschreiben diejenigen  $\beta$ -Teilchen, deren longitudinale Komponente vollständig polarisiert ist, während die transversale unpolarisiert ist. Der Vektor des Spins liegt entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung und beschreibt einen Kreiskegel, dessen Erzeugende mit der Richtung dem Impuls einen Winkel einschließen, dessen Sinus  $\sqrt{1 - \beta^2}$  ist. Die Zahl der vollständig polarisierten  $\beta$ -Teilchen bildet nur einen vergleichsweise kleinen Bruchteil der Zahl der teilweise polarisierten, gegeben durch

$$\gamma \sim \frac{a^2 - b^2}{2 b^2} \sim 0,1.$$

Wenn der Spin des zerfallenden Neutrons nicht orientiert ist, so verschwindet auch diese Größe und alle  $\beta$ -Teilchen werden nicht vollständig longitudinal polarisiert sein.

Außer an Hand der Spiegelasymmetrie, die man beim Zerfall von polarisierten Teilchen beobachtet, kann das Phänomen der Paritätsverletzung auch beim Zerfall unpolarisierter Teilchen beobachtet werden. Dabei muß man be-

merken, daß bei der Untersuchung des Zerfalls unpolarisierter Teilchen keinerlei künstliche Vorstellungen über die Anisotropie des Raumes eingeführt werden, so daß es eigentlich unmöglich sein müßte, eine Spiegelasymmetrie für die Zahl der fortfliegenden Elektronen zu beobachten. Die Spiralität des Antineutrinos, welche durch eine zirkulare Polarisation beschrieben wird, führt zu einer axialen Unsymmetrie um den Impulsvektor, die ihrerseits zum Auftreten einer longitudinalen Polarisation der fortfliegenden Elektronen führt.

Wenn wir uns nur auf die Untersuchung der longitudinalen Komponente des Spin-Pseudovektors beschränken, so müssen wir zur Berechnung des Quadrats des Matrixelements anstelle der Kasimirschen Formel den Ausdruck

$$R = \frac{1}{4} \varrho_{\mu' \mu} \sigma_{\nu' \nu}$$

benutzen<sup>2)16)</sup>, wobei

$$\begin{aligned} \varrho_{\mu' \mu} &= \frac{1}{4} \text{Spur } \varrho_{\mu'} \left( 1 + \varepsilon' s' \varrho_1 \frac{k'}{K'} + \varepsilon' \varrho_3 \frac{k'_0}{K'} \right) \varrho_{\mu} \left( 1 + \varepsilon s \varrho_1 \frac{k}{K} + \varepsilon \varrho_3 \frac{k_0}{K} \right) \\ \sigma_{\nu' \nu} &= \frac{1}{4} \text{Spur } \sigma_{\nu'} \left( 1 + s' \frac{(\vec{\sigma} \vec{k}')}{k'} \right) \sigma_{\nu} \left( 1 + s \frac{(\vec{\sigma} \vec{k})}{k} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Dann finden wir für die *V-A*-Variante<sup>23)</sup> in dem Falle, daß die Masse des Neutrinos verschwindet ( $k_0 = 0$ )<sup>22)16)2)</sup>:

$$R_{s_e} = 1 + \varepsilon_e \varepsilon_{\nu} s_e s_{\nu} \frac{v}{c}. \quad (70)$$

Nehmen wir an, daß für Elektronen  $\varepsilon_e = 1$ , für Antineutrino  $\varepsilon_{\nu} = -1$  und  $s_e = 1$ , so finden wir, daß vorzugsweise linkshändige Elektronen wegfliegen, wobei wir für den Polarisationsgrad Werte erhalten, die gut mit den Resultaten der Experimente übereinstimmen.

$$P = \frac{R_{s_e=1} - R_{s_e=-1}}{R_{s_e=1} + R_{s_e=-1}} = -\beta.$$

Wir können also, indem wir die Polarisations-eigenschaften durch reelle Bewegungen (den Spin durch eine Rotation, den Impuls durch einen polaren Vektor) beschreiben, die grundlegenden Erscheinungen der Paritätsverletzung (die Spiegelasymmetrie und das Auftreten einer longitudinalen Polarisation bei den gebildeten Teilchen) ohne irgendwelche Annahmen über die Asymme-

<sup>23)</sup> Bekanntlich wurde die *V-A*-Variante von Feynman und Gell-Mann betrachtet. Für die ursprünglich von Lee und Yang betrachtete *S, T*-Variante hätten wir für die entsprechenden Matrixelemente folgenden Ausdruck gefunden:

$$R_{s_e}^{S,T} = 1 - \varepsilon_e \varepsilon_{\nu} s_e s_{\nu} \frac{v}{c}, \quad (70a)$$

wobei wir unter der Voraussetzung, daß  $\varepsilon_e \varepsilon_{\nu} = -1$  und bei Berücksichtigung des experimentellen Resultats, daß beim  $\beta$ -Zerfall vorwiegend linkshändige Elektronen entsprechen, für das Antineutrino  $s_e = s_{\nu} = -1$  setzen müßten. Auf Grund ihrer Untersuchungen, die Feynman und Gell-Mann von der universellen 4-Fermionen-Wechselwirkung ausgehend durchgeführt haben und bei der für  $k_0 = 0$  alle Teilchen (z. B. die Elektronen) mit einem bestimmten  $s$  ausgesendet werden, die Antiteilchen (z. B. das Antineutrino) dagegen mit einem anderen, kamen sie zu dem Ergebnis, daß beim  $\beta$ -Zerfall stets  $s_e s_{\nu} = -1$  sein muß, d. h. daß man zur Erklärung der Experimente mit polarisierten Teilchen notwendig eine *V-A*-Wechselwirkung annehmen muß.

trie des Raumes und ohne den Übergang von linkshändigen zu rechtshändigen Teilchen bei einer räumlichen Inversion erklären.

Es muß bemerkt werden, daß in der Zweikomponententheorie von Lee und Yang die Koeffizienten  $G$  reell sein müssen. In der Tat, wenn diese Koeffizienten komplex wären, dann wäre in der rechten Seite der Formel (67) ein zusätzliches Glied

$$\Delta \bar{s}_0 \sim i (G_V^+ G_A - G_A^+ G_V) \left( \vec{s}_n [\vec{K}_\sigma \vec{K}_\theta] \right), \quad (71)$$

erschienen, welches eine azimutale Asymmetrie ergeben würde, die sich bei  $P$ - $C$ - und  $T$ -Transformationen anders ändern würde als die Zweikomponentengleichungen. In unserem Falle ist diese Forderung nicht zwingend, da sowohl bei Anwesenheit einer azimutalen Asymmetrie (die bei komplexen Kopplungskonstanten der 4-Fermionenwechselwirkung auftritt) als auch bei polarer Asymmetrie (wenn die Spiralität der Teilchen vom Energievorzeichen abhängt) ein und dieselben Beziehungen (s. auch (64))

$$T \neq \text{const}, \quad C \neq \text{const}, \quad P = \text{const}, \quad T' = T \quad C = \text{const} \quad (71a)$$

erfüllt werden.

Die Invarianz des Ausdrucks (71) in bezug auf die  $T'$ -Transformation kann in unserem Falle leicht erhalten werden, wenn man berücksichtigt, daß wir bei dieser Transformation haben:

$$\vec{S} \rightarrow -\vec{S}, \quad \vec{K} \rightarrow -\vec{K}, \quad G \rightarrow G^+.$$

Die Bedingung (71a) läßt sich als Verallgemeinerung des Theorems von Lüders-Pauli für den Fall der Anwesenheit sowohl einer polaren, als auch einer azimutalen Asymmetrie auffassen.

Allgemein kann man sagen, daß die Untersuchung der transversalen Polarisation bei spontanen Zerfallsprozessen unter Beteiligung des Neutrinos zur Klärung vieler Einzelheiten, die mit dem Charakter der Wechselwirkung zusammenhängen, nützlich sein könnten. So ist es z. B. beim Zerfall des  $\mu$ -Mesons in ein Elektron, ein Neutrino und ein Antineutrino ( $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$ ) auf Grund einer  $V$ - $A$ -Wechselwirkung wichtig, die Art der Kombination der Wellenfunktionen festzustellen.

Nach der Variante von Lee und Yang ist die Anordnung der Wellenfunktionen folgendermaßen:

$$U^{\text{Lee-Yang}} = \sum_i G_i (\psi_e^+ O_i \psi_\mu) (\psi_\nu^+ O_i \psi_\nu). \quad (72)$$

Nach Feynman und Gell-Mann müssen wir schreiben:

$$U^{\text{Feynman}} = \sum_i G_i (\psi_e^+ O_i \psi_\nu) (\psi_\nu^+ O_i \psi_\mu). \quad (72a)$$

Die Variante von Lee und Yang gibt bei  $G_A \neq -G_V$  eine von Null verschiedene Komponente der Transversalpolarisation der Elektronen (die entsprechende Komponente des Vektors  $\vec{\sigma}^0$  liegt senkrecht zur Ebene  $\vec{K}_e \vec{K}_\mu$ ) da das Glied, das zur Matrix  $\varrho_\mu$  proportional ist, den Faktor  $\frac{k_{0e} k_{0\mu}}{K_e K_\mu}$  enthält, der in der Feynman-Gell-Mannschen Variante nicht vorhanden ist. Daher werden nach der Variante von Feynman-Gell-Mann die Elektronen, die bei Zerfall eins ruhenden  $\mu$ -Mesons entstehen, nur teilweise longitudinal polarisiert sein.

### § 5. Polarisationseffekte bei elektromagnetischen Wechselwirkungen

Gemäß den hier entwickelten Gesichtspunkten steht die Erscheinung der Verletzung der Parität nicht mit irgendwelchen Asymmetrieeigenschaften des geometrischen Raumes im Zusammenhang, die bei einer räumlichen Inversion ein linkshändiges Neutrino in ein rechtshändiges überführen und von den Teilchen selbst, genauer von ihren Spin- und Polarisationseigenschaften, bestimmt werden. Daher kann die Paritätsverletzung auch in der einen oder anderen Form bei anderen Erscheinungen auftreten, insbesondere bei elektromagnetischen Prozessen, bei denen Teilchen eine longitudinale Polarisation haben können. Bekanntlich gelten für die Energie  $\varepsilon$ , den Impuls  $\vec{G}$  und den Spin  $\vec{S}$  eines Photons (transversale elektromagnetische Wellen) folgende Ausdrücke (s. z. B. 24<sup>2</sup>)):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) d^3 x, \\ \vec{G} &= \frac{1}{4\pi c} \int [\vec{E} \vec{H}] d^3 x, \quad \vec{S} = \frac{1}{4\pi c} \int [\vec{E} \vec{A}] d^3 x.\end{aligned}\quad (73)$$

Die quantisierte Amplitude  $\vec{a}$  der Photonen kann für gegebenen Impuls als Summe zweier Zustände dargestellt werden, die sich durch ihre Polarisation unterscheiden:

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s=\pm 1} (\vec{\beta} + i s [\vec{k}^0 \vec{\beta}]) q_s e^{-i \vec{k} t + i \vec{k} \vec{r}} + k. k., \quad (74)$$

wobei die Operatoren  $q_s$  folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$q_s q_{s'}^\dagger - q_{s'}^\dagger q_s = \delta_{ss'}$$

und  $\vec{\beta}$  ein beliebiger Einheitsvektor ist, der senkrecht auf dem Wellenvektor  $\vec{k}$  steht.

Dann müssen wir für ein Photon, welches rechtszirkular polarisiert ist (s. Gleichung (56)), in einem Rechtssystem  $s^{\text{rechts}} = 1$  und in einem Linkssystem  $s^{\text{links}} = -1$  setzen, umgekehrt für ein linkspolarisiertes Photon  $s^{\text{rechts}} = -1$  und  $s^{\text{links}} = 1$ .

Die Ruhmasse des Photons verschwindet und daher wird die Spiralität, welche die Polarisation charakterisiert, beim Übergang von einem Inertialssystem zu einem anderen streng erhalten. In diesem Zusammenhang entspricht, wie wir bereits bemerkten, das rechtspolarisierte Photon dem Antineutrino und das linkspolarisierte Photon dem Neutrino.

Daher muß bei Erscheinungen, an denen vorwiegend Photonen einer bestimmten Polarisation beteiligt sind, die Verletzung der Parität in irgend-einer Weise in Erscheinung tritt.

Als ein Beispiel für einen solchen Prozeß kann man die Polarisationseigenschaften der Synchrotronstrahlung anführen.

Die Rolle des Neutrinos spielt in diesem Falle die Kreisbewegung der Elektronen im Magnetfeld, welche von dessen Orientierung  $s_H = \pm 1$  abhängig ist. In dem Fall, daß die umlaufenden Elektronen nicht polarisiert sind, steht dieser Vorgang in Analogie zum  $\beta$ -Zerfall eines unpolarisierten Neutrons, nur

<sup>24)</sup> А. А. Соколов, А. И. Мухтаров, Вестник Московского Университета № 8, 63 (1948).

daß in diesem Falle nicht polarisierte Elektronen, sondern Photonen emittiert werden.

Die Abhängigkeit der zirkularen Polarisation der Photonen vom Winkel, unter dem sie ausgestrahlt werden, ergibt sich aus folgender Formel<sup>25)</sup>:

$$w(\theta, s_\gamma) = \text{const} [\beta^2 J_\nu^2(\nu \beta \sin \theta) + \text{ctg}^2 \theta \cdot J_\nu^2(\nu \beta \sin \theta) - 2 s_H s_\gamma \beta \text{ctg} \theta J'_\nu(\nu \beta \sin \theta) J_\nu^2(\nu \beta \sin \theta)], \quad (76)$$

wobei  $\theta$  der Winkel zwischen der Emissionsrichtung der Photonen und der  $z$ -Achse ist, die Nummer der ausgesandten Harmonischen,  $\nu$  die Geschwindigkeit der Elektronen und  $J_\nu$  die Bessel-Funktion bedeutet. Die ersten beiden Glieder in der Formel (76) sind der bekannte Ausdruck von Schott, welcher für die Theorie der Synchrotron-Strahlung grundlegend ist.

Daraus ist ersichtlich, daß, falls die  $z$ -Achse die Orientierung des Rechts-umlaufsinns der Elektronen charakterisiert (in einem Rechtssystem laufen die Elektronen von der  $x$ -Achse zur  $y$ -Achse,  $s_H^{\text{rechts}} = 1$  in einem Linkssystem ist umgekehrt  $s_H^{\text{links}} = -1$ ), für Winkel  $\theta < \frac{\pi}{2}$  vorwiegend linkspolarisierte Photonen ( $s_\gamma^{\text{rechts}} = -1$ ,  $s_\gamma^{\text{links}} = 1$ ) ausgesandt werden und umgekehrt für  $\theta > \frac{\pi}{2}$  vorwiegend rechtspolarisierte ( $s_\gamma^{\text{rechts}} = 1$ ,  $s_\gamma^{\text{links}} = -1$ ).

Die Paritätsverletzung muß prinzipiell nicht nur bei Emission eines Neutrinos oder Antineutrinos, sondern auch bei Absorption und Streuprozessen auftreten.

So müssen z. B. bei der Absorption eines Antineutrinos



vorzugsweise rechtspolarisierte Elektronen auftreten. In der Theorie der Photonen muß man als entsprechendes Analogon die Bremsstrahlung longitudinal polarisierter Elektronen ansehen, die (im ultrarelativistischen Bereich) vorwiegend Photonen emittieren müssen, mit derselben Spiraltät, die sie selbst vor der Abbremsung haben<sup>26)</sup><sup>27)</sup>.

Ganz genau so müssen bei der Streuung von longitudinal polarisierten Photonen an unpolarisierten Elektronen die gestreuten Photonen ebenfalls polarisiert sein.

In diesem Fall müssen wir die Klein-Nishina-Formel um ein Glied proportional  $s_\gamma s'_\gamma$  ergänzen. Dann nimmt der entsprechende Ausdruck für den effektiven Streuquerschnitt folgende Form an:

$$d\sigma = \frac{d\Omega}{4 \xi^2} \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left[ \xi + \frac{1}{\xi} - \sin^2 \theta + s_\gamma s'_\gamma \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right) \cos \theta \right], \quad (77)$$

wobei  $\xi = 1 + \frac{e}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)$ ,  $e$  die Energie des einfallenden Photons ist.

<sup>25)</sup> А. А. Соколов и И. М. Тернов, ЖЭТФ, **31**, 473 (1956).

<sup>26)</sup> K. W. McVoy, Physic. Rev. **110**, 1484 (1958).

<sup>27)</sup> Б. К. Керимов и И. М. Наджафов, „Тормозное излучение продольно-поляризованного электрона“ Доклад на VIII Всесоюзном совещании по ядерной спектроскопии. Ленинград, январь 1958 г; см. также Изв. АН СССР, серия физ. № 22, 7, 886 (1958); с. auch Б. К. Керимов, ДАН СССР, **135**, 1111 (1960).

Daraus ist ersichtlich, daß im ultrarelativistischen Fall die gestreuten Photonen vorwiegend dieselbe zirkulare Polarisation wie die einfallenden besitzen. Diese Erscheinung wurde in der Arbeit<sup>28)</sup> mit der Paritätsverletzung in Zusammenhang gebracht.

Wenn wir in der Formel (77) über die Spinzustände des gestreuten Photons summieren, so erhalten wir für beliebige Winkel für die Zahl der gestreuten Photonen die Klein-Nishina-Formel.

Wir erhalten jedoch eine Abweichung von der Klein-Nishina-Formel für die Zahl der gestreuten Photonen (d. h. ein Analogon zur Spiegelasymmetrie bei der Paritätsverletzung), wenn wir die Streuung von longitudinal polarisierten Photonen an polarisierten Elektronen untersuchen.

Dann treten in dem effektiven Streuquerschnitt von Klein-Nishina Glieder proportional zu  $s_\gamma s_e$ <sup>28)</sup><sup>29)</sup> auf:

$$d\sigma = \frac{d\Omega}{2 \xi^2} \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left[ \xi + \frac{1}{\xi} - \sin^2 \theta - s_\gamma s_e \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right) \cos \theta \right].$$

In diesem Ausdruck müssen wir  $s_\gamma s_e = 1$  setzen, falls die Spins des Elektrons und des einfallenden Photons parallel sind, im umgekehrten Falle  $s_\gamma s_e = -1$ .

<sup>28)</sup> A. A. СОКОЛОВ и Б. А. ЛЫСОВ, ЖЭТФ, **34**, 1351 (1958).

<sup>29)</sup> S. B. Gunst u. L. A. Page, Physic. Rev. **92**, 970 (1953).

Moskau, Phys. Fakultät der Staatl. Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 30. Januar 1961.

## **Eine einfache Normalform des Gravitationsfeldes erster Näherung**

*Von A. Papapetrou*

### **Inhaltsübersicht**

Es werden Gravitationsfelder erster Ordnung  $18''$  betrachtet, die den Einsteinschen Feldgleichungen für das Vakuum sowie der Grenzbedingung im Unendlichen genügen. Es wird bewiesen, daß sie sich mittels geeigneter Koordinatentransformationen auf eine einfache, die die Dondersche Koordinatenbedingung erfüllende Normalform bringen lassen.

§ 1. In einer Reihe von früheren Arbeiten<sup>1)</sup> wurden Gravitationsfelder untersucht, die von der Zeit periodisch abhängen und den Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1)$$

sowie der Bedingung im Unendlichen

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \text{ für } r \rightarrow \infty \quad (2)$$

genügen. Aus der Untersuchung, die mit Hilfe eines systematisch entwickelten Näherungsverfahrens durchgeführt wurde, ergab es sich, daß solche Felder nicht existieren: Sind in der ersten Näherung (1) und (2) erfüllt und ist das Feld in dieser Näherung wesentlich (und nicht nur scheinbar) periodisch, so divergiert notwendig die zweite Näherung. Der Beweis wurde zunächst unter Verwendung der de Donderschen Koordinatenbedingung,

$$g^{\mu\nu, \nu} = 0, \quad (3)$$

erbracht. Im letzten Teil von I wurde dann noch bewiesen, daß dieses Ergebnis unabhängig von jeder Koordinatenbedingung gilt.

Letzterer Beweis scheint jedoch im Fall des reinen Gravitationsfeldes logisch unvollständig zu sein. Es wurde nämlich dabei aus der Annahme ausgegangen, daß das Feld erster Näherung neben (1) und (2) ebenfalls (3) befriedigt und es konnte dann gezeigt werden, daß die Divergenz der zweiten Näherung in allen Koordinatensystemen besteht. Es ist aber noch der Fall denkbar, daß periodische Gravitationsfelder existieren, die in der ersten Näherung (1) und (2) befriedigen, dann aber (3) nicht erfüllen können. Für solche Felder, falls sie

<sup>1)</sup> A. Papapetrou, Ann. Physik (6) **20**, 399 (1957); (7) **1**, 186 (1958); (7) **2**, 87 (1958) (diese Arbeit wird im Folgenden als I bezeichnet); A. Papapetrou und H. Treder, Ann. Physik (7) **3**, 360 (1959); (7) **6**, 311 (1960).

wirklich existieren würden, wäre ersichtlich die verwendete Beweismethode nicht anwendbar.

In der vorliegenden Arbeit werden wir Gravitationsfelder betrachten, welche in der ersten Näherung die Feldgleichung (1) und die Grenzbedingung (2) erfüllen, und wir versuchen, sie dann mittels Koordinatentransformationen auf eine möglichst einfache Form zu bringen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung seien schon an dieser Stelle kurz aufgezählt: Es gibt eine besonders einfache reduzierte Form dieser Felder. Diese Form — welche für den zeit-abhängigen und den zeitunabhängigen Teil des Feldes verschieden ist — hat die Eigenschaft, daß sie neben (1) und (2) auch die Bedingung (3) erfüllt. Ist das Ausgangsfeld noch zeitlich periodisch, so ist auch seine reduzierte Form periodisch. Durch diese Ergebnisse wird also die Lücke in dem in I gegebenen Beweis von der Nichtexistenz von periodischen, (1) und (2) genügenden Gravitationsfeldern ausgefüllt.

§ 2. Wir denken uns das Feld  $g^{\mu\nu}$  in eine Reihe zerlegt:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + {}_1g^{\mu\nu} + {}_2g^{\mu\nu} + \dots$$

Aus (1) ergibt sich für  ${}_1g^{\mu\nu}$ , wenn (3) nicht gefordert wird, die Feldgleichung

$$\square {}_1g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} {}_1g^{\nu\beta, \alpha\beta} - \eta^{\nu\alpha} {}_1g^{\mu\beta, \alpha\beta} + \eta^{\mu\nu} {}_1g^{\alpha\beta, \alpha\beta} = 0. \quad (4)$$

Das allgemeinste  ${}_1g^{\mu\nu}$  wird in bezug auf die Zeit  $t$  ein diskretes wie auch ein kontinuierliches Spektrum besitzen<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} {}_1g^{\mu\nu} = & \sum_j \{ \cos \omega_j t \cdot {}_1g_{(j)}^{\mu\nu}(x^l) + \sin \omega_j t \cdot {}_1g_{(j)}^{\mu\nu}(x^l) \} \\ & + \int_0^\infty \{ \cos \omega t \cdot {}_1g^{\mu\nu}(\omega, x^l) + \sin \omega t \cdot {}_1g^{\mu\nu}(\omega, x^l) \} d\omega. \end{aligned} \quad (5)$$

Der Kürze halber werden wir in der folgenden Beweisführung nur die diskrete Summe explizite schreiben. Später werden wir dann eine bei dem Integralterm nötige einfache Modifizierung der Beweisführung erwähnen. Bei der diskreten Summe müssen wir allerdings den zu  $\omega_j = 0$  entsprechenden zeit-unabhängigen Teil von der übrigen zeitabhängigen Summe trennen, da diese zwei Teile grundsätzlich verschiedene Behandlung erfordern. Wir schreiben also:

$${}_1g^{\mu\nu} = {}_1g_{(0)}^{\mu\nu}(x^l) + \sum_{\omega_j \neq 0} e^{i\omega_j t} {}_1g_{(j)}^{\mu\nu}(x^l). \quad (5a)$$

Die Annahme, daß die Komponenten  ${}_1g^{\mu\nu}$  der Bedingung (2) genügen,

$${}_1g^{\mu\nu} \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty,$$

präzisieren wir dadurch, daß sie für  $r \rightarrow \infty$  wie  $r^{-\alpha}$  mit  $\alpha \geq 1$  verschwinden. Dasselbe Verhalten wird auch für  ${}_1g_{(0)}^{\mu\nu}$  und  ${}_1g_{(j)}^{\mu\nu}$  angenommen. Wenn die rechte Seite von (5a) eine unendliche Reihe ist, werden wir noch annehmen, daß sie absolut konvergiert, so daß es erlaubt ist, irgendwelche Differentia-

<sup>2)</sup> Der Index  $j$  von  $\omega_j$  nimmt Werte  $j = 1, 2, \dots$  an. Sonst gilt, wie üblich, für griechische Indizes  $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ , für lateinische  $k, l = 1, 2, 3$ . Ferner ist  $t = x^4$  ( $c = 1$ ).

tionen gliedweise auszuführen. Schließlich werden wir noch fordern, daß auch die Ableitungen von  $g_{(0)}^{\mu\nu}$  und  $g_{(j)}^{\mu\nu}$  für  $r \rightarrow \infty$  wie  $r^{-\alpha}$  mit  $\alpha \geq 1$  verschwinden<sup>3)</sup>.

Wir betrachten nun Koordinatentransformationen der Form

$$x^{*\mu} = x^\mu - f^\mu(x^*) + \dots \quad (6)$$

( $f^\mu$  klein von der ersten Ordnung). Die entsprechende Transformationsformel für  $g^{\mu\nu}$  lautet

$$g^{*\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} f_{,\alpha} - \eta^{\nu\alpha} f_{,\alpha} + \eta^{\mu\nu} f_{,\alpha}^* \quad (7)$$

Die Tatsache, daß  $g^{*\mu\nu}$  linear sowohl von  $g^{\mu\nu}$  wie auch von  $f^\mu$  abhängt, gibt uns die Möglichkeit,  $g^{\mu\nu}$  und entsprechend auch  $f^\mu$  in Teile zu spalten und diese Teile getrennt zu diskutieren. Wie wir schon erwähnt haben, wird in der vorliegenden Untersuchung nötig, das Feld  $g^{\mu\nu}$  in den zeitabhängigen und den zeitunabhängigen Teil zu spalten.

§ 3. Wir wollen zunächst den zeitabhängigen Teil  $g_{(0)}^{\mu\nu} - g_{(0)}^{\mu\nu}$  betrachten. Wir werden dabei, um die Schreibweise zu vereinfachen,  $g_{(0)}^{\mu\nu}$  aus den verschiedenen Formeln weglassen und somit setzen

$$g^{\mu\nu} = \sum_{\omega_j \neq 0} e^{i \omega_j t} g_{(j)}^{\mu\nu} \quad (8)$$

Wir werden zeigen, daß man dieses  $g^{\mu\nu}$  in eine Form bringen kann, die neben der Grenzbedingung (3) noch folgende Forderungen erfüllt:

$$g^{*4\alpha} = 0, \quad \eta_{\mu\nu} g^{*\mu\nu} = 0; \quad g^{*\mu\nu}{}_\nu = 0. \quad (9)$$

Der Beweis wird dadurch erbracht, daß wir die dazu erforderliche Transformation der Form (6) unmittelbar bestimmen.

Wir versuchen zunächst nur folgende der Bedingungen (9) zu erfüllen:

$$g^{*4s} = 0, \quad g^{*44} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} g^{*\mu\nu} = 0. \quad (9a)$$

Beachten wir (7), so finden wir hieraus für  $f^\mu$  die Differentialgleichungen

$$f^4,4 = \frac{1}{2} \left( g^{44} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \right), \quad f^s,4 = f^4, s + g^{4s}. \quad (9b)$$

Diese Gleichungen können wir, wegen der einfachen Form (8) von  $g^{\mu\nu}$ , unmittelbar integrieren. Das Ergebnis lautet:

$$\left. \begin{aligned} f^4 &= \sum_{\omega_j \neq 0} \frac{1}{i \omega_j} e^{i \omega_j t} \frac{1}{2} \left( g_{(j)}^{44} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} g_{(j)}^{\mu\nu} \right), \\ f^s &= \sum_{\omega_j \neq 0} \frac{1}{i \omega_j} e^{i \omega_j t} \left\{ g_{(j)}^{4s} + \frac{1}{2 i \omega_j} \left( g_{(j),s}^{44} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} g_{(j),s}^{\mu\nu} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3) Es ist leicht einzusehen, daß diese Forderung nicht immer erfüllt zu sein braucht. Man gehe z. B. von den  $g^{\mu\nu}$  des Schwarzschild'schen Feldes aus und führe eine Koordinatentransformation der Form  $x^{*\mu} = x^\mu - f^\mu$  mit  $f^\mu = \frac{\sin k r^2}{k r^2}$  aus. Wegen  $f^1, m \sim \frac{1}{r}$ ,

$f^1, m \sim 1$  wird  $g^{*\mu\nu} \sim \frac{1}{r}$ , aber  $g^{*\mu\nu}, \nu \sim 1$  und die letzte Annahme also von den  $g^{*\mu\nu}$  nicht erfüllt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß ein solches Verhalten wie im angegebenen Beispiel nur von einem wegztransformierbaren Teil des Feldes herrühren kann. Die Frage wurde aber nicht näher diskutiert und aus diesem Grunde ist diese letzte Forderung als unabhängige Annahme eingeführt.

Wir werden nun beweisen, daß mit diesen Funktionen  ${}_1f^\mu$  sämtliche Forderungen (9) erfüllt werden. Wir finden zunächst aus (9b):

$$\square {}_1f^4 = \frac{1}{2} \square {}_1g^{44} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square {}_1g^{\mu\nu}, \quad \square {}_1f^s = \square {}_1g^{4s} + \square {}_1f^4.$$

Nun folgt aus der Feldgleichung (4):

$$\square {}_1g^{44} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square {}_1g^{\mu\nu} = 2 {}_1g^{4\alpha}, \quad \square {}_1g^{4s} = {}_1g^{s\alpha} - {}_1g^{4\alpha}$$

und daher zunächst

$$\square {}_1f^4 = {}_1g^{4\alpha}.$$

Beachtet man die Art der Zeitabhängigkeit von  ${}_1g^{\mu\nu}$  und  ${}_1f^\mu$ , Formeln (8) und (10), so ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\square {}_1f^4 = {}_1g^{4\alpha}. \quad (11)$$

Ähnlich findet man, unter Verwendung von (11),

$$\square {}_1f^s = {}_1g^{s\alpha}. \quad (11a)$$

Die Gleichungen (11) und (11a) zeigen, daß im Koordinatensystem  $x^{*\mu}$  die Dondersche Bedingung erfüllt wird:

$${}_1g^{*\mu\nu} = 0.$$

Kombiniert man schließlich die Komponente  $\mu = 4$  dieser Gleichung mit der ersten der Gleichungen (9a), so folgt daraus

$${}_1g^{*44} = 0 \quad \text{und daher auch} \quad {}_1g^{*44} = 0.$$

Es sind also tatsächlich sämtliche Forderungen (9) erfüllt. Schließlich sieht man unmittelbar aus (10), daß die Funktionen  ${}_1f^\mu$ , und somit auch die Größen  ${}_1g^{\mu\nu}$  die Bedingung im Unendlichen erfüllen.

Im Falle, daß  ${}_1g^{\mu\nu}$  neben der Summe (8) noch einen Integralterm enthält, würde man ähnlich vorgehen können und die Formeln (10) mit den entsprechenden Integraltermen ergänzen. Es wird aber eventuell eine leichte Modifizierung nötig. Geht man nämlich auf die reelle Form (5) von  ${}_1g^{\mu\nu}$  zurück, so sieht man, daß bei der Ergänzung der Formel (10) für  ${}_1f^4$  neben anderen auch der Term

$$- \int_0^\infty \frac{\cos \omega t}{\omega} \cdot \left\{ \frac{1}{2} {}_1g'^{44}(\omega, x^l) - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} {}_1g'^{\mu\nu}(\omega, x^l) \right\} d\omega$$

auftritt. Dieser Term wird aber an der unteren Integrationsgrenze divergieren, wenn  $\left\{ \frac{1}{2} {}_1g'^{44} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} {}_1g'^{\mu\nu} \right\}_{\omega \rightarrow 0} \neq 0$  ist. Um der Schwierigkeit zu entgehen, genügt es noch einen zeitunabhängigen Term der Form

$$+ \left\{ \frac{1}{2} {}_1g^{44} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} {}_1g^{\mu\nu} \right\}_{\omega \rightarrow 0} \cdot \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\omega}$$

(mit beliebig gewählten  $\omega_0$ ) hinzuzufügen. Ähnlich wird man auch die Funktionen  ${}_1f^s$  bestimmen. Man kommt somit zum Ergebnis, daß auch in diesem allgemeinen Fall das Feld  ${}_1g^{\mu\nu}$  auf die durch (9) charakterisierte Form  ${}_1g^{*\mu\nu}$  gebracht werden kann.

§ 4. Die gefundenen  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  haben nicht nur eine besonders einfache Form, sondern auch die charakteristische Eigenschaft, daß sie in bezug auf Transformationen der Form (6) eindeutig definiert sind. Betrachten wir nämlich eine neue Transformation

$$x^{*\mu} = x^{\mu} - {}_1f^{\mu} \quad (11b)$$

und fordern, daß auch  ${}_{1g}^{**\mu\nu}$  die Eigenschaften (9) hat, so gelangen wir zu den Bedingungen

$${}_1f_{,0}^{*s} = {}_1f_{,4}^{*4} = {}_1f_{,s}^{*4} - {}_1f_{,4}^{*s} = \square {}_1f^{\mu} = 0.$$

Daraus folgt zunächst:

$${}_1f_{,44}^{*s} = 0, \quad \text{d. h.} \quad {}_1f^{*s} = \varphi^s(x^l) + x^4 \chi^s(x^l).$$

Der erste Term  $\varphi^s$  würde in  ${}_{1g}^{**\mu\nu}$  zeitunabhängige Terme ergeben. Da wir den zeitabhängigen und den zeitunabhängigen Teil des Feldes getrennt behandeln, sind solche Terme hier auszuschließen und daher  $\varphi^s = 0$  zu setzen. Die weitere Diskussion zeigt, daß

$$\chi_{,l}^s = 0, \quad \text{d. h.} \quad \chi^s = \text{const}$$

sein muß, da sich sonst in  ${}_{1g}^{**\mu\nu}$  Terme ergeben würden, die die Zeit  $t$  als Faktor enthalten und daher mit  $t$  unbeschränkt wachsen. Es folgt dann weiter:

$${}_1f^{*4} = \chi^s x^s.$$

Wie man leicht verifiziert, ist die so bestimmte Transformation (11b) eine infinitesimale Lorentz-Transformation, bei der sich  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  nicht ändert:

$${}_{1g}^{**\mu\nu} = {}_{1g}^{*\mu\nu}.$$

Wir haben somit das Ergebnis: Die Form  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  mit den Eigenschaften (9) ist eindeutig bestimmt und das ihr entsprechende Koordinatensystem ist ebenfalls, bis auf infinitesimale<sup>4)</sup> Lorentztransformationen, eindeutig festgelegt.

Diese Form hat die weitere wichtige Eigenschaft, daß sie keinen wegtransformierbaren Teil enthält. Rechnet man nämlich den zu  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  entsprechenden Krümmungstensor (in erster Näherung) nach, so findet man, daß dieser nur dann verschwindet, wenn sämtliche Komponenten  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  verschwinden. Es ist also gerechtfertigt, die Form  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  als eine Normalform des zeitabhängigen, der Vakuumfeldgleichung (4) genügenden Feldes erster Näherung zu bezeichnen. — Es sei aber nochmals betont, daß die Erfüllung aller Bedingungen (9) nur bei Gültigkeit der Vakuumfeldgleichung (4) möglich ist. Es folgt daraus, daß die durch (9) charakterisierte Normalform  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  nur für überall reguläre Gravitationsfelder ohne Einschränkungen verwendbar ist. Im Falle eines Gravitationsfeldes mit materiellen Quellen würde man die Normalform  ${}_{1g}^{*\mu\nu}$  nur in dem die Quellen umgebenden Raum erreichen können: Zur globalen Beschreibung eines solchen Feldes sollte man die von Fock vorgeschlagene<sup>5)</sup>, mit Hilfe der Ausstrahlungsbedingung definierte Normalform von  ${}_{1g}^{\mu\nu}$  vorziehen.

<sup>4)</sup> Endliche Lorentztransformationen, die bei dem Ansatz (6) einfacheitshalber unterdrückt wurden, sind selbstverständlich ebenfalls zugelassen. Ersichtlich transformiert sich dabei  ${}_{1g}^{\mu\nu}$  wie ein Tensor.

<sup>5)</sup> Siehe V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Berlin 1960, S. 87.

Form,  
Trans-  
ch eine  
(11b)  
zu den  
vir den  
ndeln,  
weitere  
Faktor  
ter:  
) eine  
: (9) ist  
eben-  
gelegt.  
weg-  
chen-  
dieser  
nden.  
zeitab-  
erung  
er Be-  
ist.  
er für  
er ist.  
die  
nen:  
ock  
form  
halber  
trans-  
87.

§ 5. Wir wollen nun den zeitunabhängigen Teil  ${}_{19}^{\mu\nu}$  von  ${}_{19}^{\mu\nu}$  betrachten. Bei seiner Diskussion kommen nur Koordinatentransformationen der Form (6) mit zeitunabhängigen Funktionen  ${}_1f^\mu$  in Frage, da sonst aus  ${}_{19}^{\mu\nu}$  ein auch einen zeitabhängigen Teil enthaltendes  ${}_{19}^{*\mu\nu}$  entstehen würde. Man sieht übrigens unmittelbar, daß die zeitunabhängigen  ${}_1f^\mu$  genügen, um die die Donder-sche Bedingung zu erfüllen. Diese führt nämlich zu den Gleichungen

$$\square {}_1f^\mu = {}_{19}^{\mu\alpha} {}_{19,0}^{\alpha} = {}_{19}^{\mu\beta} {}_{19,0}^{\beta}.$$

Da die rechte Seite zeitunabhängig ist, wird man auch  ${}_1f^\mu$  zeitunabhängig nehmen können. Für solche  ${}_1f^\mu$  gelten dann die Gleichungen

$$\Delta {}_1f^k = - {}_{19}^{ks} {}_{19,0}^s, \quad \Delta {}_1f^4 = - {}_{19}^{4s} {}_{19,0}^s. \quad (12)$$

Die Transformationsformel (7) ergibt in dem hier betrachteten Fall:

$$\left. \begin{aligned} {}_{19}^{*kl} &= {}_{19}^{kl} + {}_{1f}^k {}_{1f}^l + {}_{1f}^l {}_{1f}^k + \eta^{kl} {}_{1f}^s {}_{1f}^s, & {}_{19}^{44} &= {}_{19}^{44} + {}_{1f}^s {}_{1f}^s; \\ {}_{19}^{*4k} &= {}_{19}^{4k} + {}_{1f}^4 {}_{1f}^k. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Diese Formeln sowie die Gleichungen (12) zeigen, daß die Komponenten  ${}_{19}^{\mu\nu}$  in zwei Gruppen geteilt werden. Die erste besteht aus den Komponenten  ${}_{19}^{kl}$  und  ${}_{19}^{44}$  und hängt mit den Transformationsfunktionen  ${}_1f^s$  zusammen; die zweite enthält die Komponenten  ${}_{19}^{4l}$  und wird lediglich mit Hilfe von  ${}_1f^4$  transformiert. Dieselbe Trennung tritt bei der Feldgleichung (4) auf. Wir dürfen also jede dieser Komponentengruppen für sich allein betrachten.

Für die erste dieser Komponentengruppen werden wir folgenden Satz beweisen: Die Funktionen  ${}_1f^s$  lassen sich so bestimmen, daß sämtliche  ${}_{19}^{*kl}$  verschwinden. Nach der ersten der Gleichungen (13) werden wir dafür die folgenden 6 Gleichungen erfüllen müssen.

$${}_{19}^{kl} + {}_{1f}^k {}_{1f}^l + {}_{1f}^l {}_{1f}^k + \eta^{kl} {}_{1f}^s {}_{1f}^s = {}_{19}^{*kl} = 0. \quad (14a)$$

Summieren wir die zu  $k = l = 1, 2, 3$  entsprechenden Gleichungen (14a), so finden wir

$${}_1f^s {}_{1f}^s = {}_{19}^{ss}. \quad (14b)$$

Die Gleichungen für  ${}_1f^k$  lauten also ausführlich:

$$\left. \begin{aligned} 2 {}_1f^1_1 &= {}_{19}^{22} + {}_{19}^{33}, & 2 {}_1f^2_2 &= {}_{19}^{33} + {}_{19}^{11}, & 2 {}_1f^3_3 &= {}_{19}^{11} + {}_{19}^{22}; \\ {}_1f^1_2 + {}_1f^2_1 &= - {}_{19}^{12}, & {}_1f^2_3 + {}_1f^3_2 &= - {}_{19}^{23}, & {}_1f^3_1 + {}_1f^1_3 &= - {}_{19}^{13}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Gleichung (14b) ist eine Folge von (14) und es genügt daher, diese letzten Gleichungen zu befriedigen.

Um die Lösbarkeit des Gleichungssystems (14) zu beweisen, reicht es aus, die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen zu bestimmen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese Integrabilitätsbedingungen mit den aus der Feldgleichung (4) für  ${}_{19}^{kl}$  folgenden Beziehungen

$$\Delta {}_{19}^{kl} - {}_{19}^{ks} {}_{19,0}^s {}_1f^l - {}_{19}^{ls} {}_{19,0}^s {}_1f^k - \eta^{kl} {}_{19}^{sp} {}_{19,0}^s {}_1f^p = 0 \quad (15)$$

identisch sind. Wir schließen daraus, daß bei einem den Vakuumgleichungen (15) genügenden zeitunabhängigen Feld  ${}_{19}^{\mu\nu}$  die Bedingungen (14a) erfüllt und

dab daß daher die Komponenten  ${}_{19(0)}^{kl}$  wegtransformiert werden können. Bei dieser Koordinatentransformation wird  ${}_{19(0)}^{44}$  nach der zweiten von (13) sowie (14b) auf

$${}_{19(0)}^{*44} = {}_{19(0)}^{44} + {}_{19(0)}^{ss} \quad (16)$$

transformiert<sup>6)</sup>. Da die rechten Seiten der Gleichungen (14) nach unseren Ausgangsannahmen bei  $r \rightarrow \infty$  (mindestens) wie  $\frac{1}{r}$  verschwinden, werden sich aus diesen Gleichungen Funktionen  ${}_{1f}^k$  ergeben, die im ungünstigsten Fall wie  $\lg r$  divergieren. Die Transformationen (6) sind auch in einem solchen Fall annehmbar, da  $\frac{r + \lg r}{r} \rightarrow 1$  für  $r \rightarrow \infty$ . Die Grenzbedingung (2) ist von den neuen Feldkomponenten  ${}_{19(0)}^{*kl}$  und  ${}_{19(0)}^{*44}$  noch (14a) und (16) automatisch erfüllt.

Die gefundene reduzierte Form von  ${}_{19(0)}^{*kl}$  und  ${}_{19(0)}^{*44}$ ,

$${}_{19(0)}^{*kl} = 0, \quad {}_{19(0)}^{*44} = {}_{19(0)}^{44} + {}_{19(0)}^{ss}, \quad (17)$$

ist ersichtlich eindeutig bestimmt. Betrachtet man neue Koordinatentransformationen der Form (6),

$$x^{**\mu} = x^{*\mu} - f^{*\mu}(x^{*a}), \quad (17a)$$

und fordert dabei wieder das Verschwinden von  ${}_{19(0)}^{**kl}$ , so ergibt sich unmittelbar, daß die  ${}_{1f}^{*k}$  derartige lineare Funktionen von  $x^{*l}$  sein müssen, daß eine infinitesimale Drehung des 3-dimensionalen Raumes ist. Das der Form (17) entsprechende Koordinatensystem ist also bis auf (infinitesimale oder auch endliche) 3-dimensionale Drehungen ebenfalls eindeutig bestimmt.

§ 6. Wir werden schließlich die Komponenten  ${}_{19(0)}^{4k}$  diskutieren. Diese erfüllen nach (4) die Feldgleichung

$$A_{19(0)}^{4k} - {}_{19(0),ks}^{4s} = 0 \quad (18)$$

und werden mit Hilfe von  ${}_{1f}^4$  nach der letzten der Gleichungen (13) transformiert. Die Gleichungen (18) stimmen formal mit den Maxwell'schen Gleichungen für ein magnetostatisches Feld überein, dessen Vektorpotential  $A_s \equiv {}_{19(0)}^{4s}$  ist. Die letzte der Gleichungen (13) stellt dann die entsprechende Eichtransformation (mit der Eichfunktion  ${}_{1f}^4$ ) dar. Das „magnetostatische Feld“ ist durch

$$H_{rs} = A_{s,r} - A_{r,s} \equiv {}_{19(0),r}^{4s} - {}_{19(0),s}^{4r}$$

<sup>6)</sup> Ein anderer Weg, der zu demselben Ergebnis führt, sei hier kurz angedeutet. Betrachtet man das Feld erster Ordnung  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ , gegeben durch

$${}_{1\tilde{g}}^{kl} = {}_{1g}^{kl}, \quad {}_{1\tilde{g}}^{44} = - {}_{1g}^{ss}, \quad {}_{1\tilde{g}}^{4s} = 0,$$

und rechnet den entsprechenden Krümmungstensor  $\tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$  ebenfalls in erster Näherung nach, so findet man

$$\tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta} = 0.$$

Es gibt also Koordinatentransformationen, die das Feld  $\tilde{g}^{\mu\nu}$  eliminieren.

gegeben. Nach unseren Ausgangshypothesen über das asymptotische Verhalten von  $g^{\mu\nu}$  verschwinden die Größen  $A_s$  für  $r \rightarrow \infty$  (mindestens) wie  $\frac{1}{r}$ . Es handelt sich also um ein magnetisches Feld, welches von einem System von Multipolen mit Ordnungen  $n \geq 2$  erzeugt wird und daher die Feldstärke  $H_{rs}$  mindestens wie  $\frac{1}{r^3}$  verschwindet. Ein solches Feld kann mit einem der Lorentzschen Eichbedingung genügenden und mindestens wie  $\frac{1}{r^3}$  verschwindenden Potential  $A_s^*$  beschrieben werden. Da die Lorentzsche Bedingung in dem vorliegenden Fall mit der vierten Komponente der de Donderschen Bedingung übereinstimmt, so folgt, daß wir eine Funktion  $f^4$  bestimmen können, mit deren Hilfe  $g_{(0)}$  in ein  $g_{(0)}^{*4s}$  übergeht, welches den Bedingungen

$$g_{(0)s}^{*4s} = 0, \quad g_{(0)}^{*4s} \sim r^{-\alpha} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad \text{mit } \alpha \geq 2 \quad (19)$$

genügt.

Die Komponenten  $g_{(0)s}^{*4s}$  sind aber – im Gegensatz zu der schon diskutierten anderen Komponentengruppe – nicht eindeutig bestimmt. Führen wir nämlich die neue Transformation  $x^{*4} = x^4 - f^4$  mit einer beliebigen Lösung  $f^4$  der Laplaceschen Gleichung aus, so ist die de Dondersche Bedingung auch von  $g_{(0)}^{*4s}$  erfüllt. Es wird also bei diesen Komponenten keine eindeutig bestimmte reduzierte Form und kein entsprechend eindeutig festgelegtes Koordinatensystem geben. Beachtet man, daß  $f^4$  mindestens wie  $\frac{1}{r}$  verschwinden muß – da sonst die Grenzbedingung von  $g_{(0)}^{*4s}$  nicht erfüllt wäre –, so folgt, daß jedes die de Dondersche Bedingung erfüllende  $g_{(0)}^{*4s}$  notwendig mindestens wie  $\frac{1}{r^2}$  verschwindet; d. h. daß die zweite der Bedingungen (19) immer eine Folge der ersten ist.

Zusammenfassend sehen wir, daß ein zeitunabhängiges Feld  $g_{(0)}$ , welches die Vakuumfeldgleichungen sowie die Grenzbedingung erfüllt, in eine Form gebracht werden kann, welche noch der de Donderschen Bedingung genügt. Diese Form ist charakterisiert durch:

$$g_{(0)}^{kl} = 0; \quad g_{(0)}^{44} \sim r^{-\alpha}, \quad g_{(0)}^{4s} \sim r^{-\beta} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (20)$$

mit  $\alpha \geq 1$ ,  $\beta \geq 2$ .

Berücksichtigen wir auch die Ergebnisse der Diskussion des zeitabhängigen Teils des Feldes, so sehen wir, daß ein beliebiges, den Vakuumgleichungen und der Grenzbedingung genügendes Feld erster Näherung in eine Form gebracht werden kann, die noch die de Dondersche Bedingung erfüllt. Dabei ist die reduzierte Form des zeitabhängigen Teils durch (9), die des zeitunabhängigen durch (20) charakterisiert.

Aus der allgemeinen Struktur der Formeln (10), die die Transformation des zeitabhängigen Teiles bestimmen, schließt man ferner, daß, wenn das Feld  $g^{\mu\nu}$  vor der Transformation zeitlich periodisch ist, auch nach der Transformation diese Eigenschaft besitzt. Durch diese Bemerkung wird der in I gegebene Beweis von der Nichtexistenz von periodischen, der Grenzbedingung genügenden

den Gravitationsfeldern ergänzt. Der Beweisgang kann wesentlich verkürzt werden, wenn man annimmt, daß das Feld erster Näherung neben der Grenzbedingung auch die der Dondersche Bedingung erfüllt (was nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit immer möglich sein wird). Wir wollen aber darauf nicht eingehen, da es sich um sehr einfache Änderungen handelt.

§ 7. In einer früheren Arbeit<sup>7)</sup> wurde gezeigt, daß das allgemeine, den Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen sowie der de Donderschen Bedingung genügende, zeitabhängige Feld erster Näherung sich mit Hilfe von zwei willkürlichen Wellenfunktionen (d. h. Lösungen der homogenen Wellengleichung) ausdrücken läßt. Die dort abgeleitete Formel wird dieses Feld im allgemeinen nicht in der durch (9) charakterisierten reduzierten Form geben. Wir werden hier eine neue Formel ableiten, die das Feld unmittelbar in seiner reduzierten Form bestimmt.

Das allgemeine Feld  $g^{\mu\nu}$  läßt sich nach Entfernung der wegtransformierbaren Terme durch den letzten Term der Formel (2) der Arbeit II (z. B. mit  $i, k = 2, 3$ ) darstellen:

$$g^{\mu\nu} = K_{(2)}^{\mu\alpha} K_{(2)}^{\nu\beta} w_{,\alpha\beta} + K_{(3)}^{\mu\alpha} K_{(3)}^{\nu\beta} v_{,\alpha\beta} + (K_{(2)}^{\mu\alpha} K_{(3)}^{\nu\beta} + K_{(3)}^{\mu\alpha} K_{(2)}^{\nu\beta}) u_{,\alpha\beta}; \quad (21)$$

hierbei sind die  $K_{(i)}^{\alpha\beta}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die in II verwendeten antisymmetrischen Matrizen<sup>8)</sup> und  $w, v, u$  drei Wellenfunktionen. Das durch (21) gegebene  $g^{\mu\nu}$  erfüllt schon, wegen der Struktur der Matrizen  $K_{(i)}^{\alpha\beta}$ , die Bedingung

$$g^{4\alpha} = 0,$$

es wird aber im allgemeinen  $\eta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \neq 0$ . Nun wissen wir andererseits, daß zur Darstellung von  $g^{\mu\nu}$  zwei willkürliche Wellenfunktionen ausreichen. Wir dürfen daher den 3 Wellenfunktionen  $w, v, u$  eine Bedingung auferlegen und in dem hier betrachteten Problem ist es naheliegend, die Bedingung

$$\eta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0$$

zu verlangen. Eine einfache Rechnung ergibt dafür:

$$-\eta_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = w_{,33} + w_{,11} + v_{,22} + v_{,11} - 2u_{,23} = 0.$$

Man kann diese Bedingung am einfachsten dadurch erfüllen, daß man die 3 Wellenfunktionen  $w, v, u$  durch die Formeln

$$w = \varphi_{,23}, \quad v = \chi_{,23}, \quad 2u = \varphi_{,11} + \varphi_{,33} + \chi_{,11} + \chi_{,33}$$

auf zwei neue willkürliche Wellenfunktionen  $\varphi, \chi$  zurückführt. Das  $g^{\mu\nu}$  wird dann mit Hilfe von vierten Ableitungen der Wellenfunktionen  $\varphi, \chi$  ausgedrückt. Rechnet man aber die tatsächlich auftretenden Ausdrücke nach, so findet man, daß in allen Termen eine Differentiation nach  $x^1$  vorkommt. Setzt man also

$$\frac{1}{2}\varphi_{,1} = W, \quad \frac{1}{2}\chi_{,1} = V,$$

so drückt sich  $g^{\mu\nu}$  mittels dritter Ableitungen der neuen Wellenfunktionen  $W, V$ . Das Endergebnis lautet:

$$g^{kl} = g^{kl}_W + g^{kl}_V, \quad g^{4\alpha} = 0 \quad (22)$$

<sup>7)</sup> C. R. Acad. Sci. Paris **251**, 49 (1960). Im folgenden wird diese Arbeit als II zitiert.

<sup>8)</sup> Für ihre Definition siehe C. R. Acad. Sci. Paris **250**, 4292 (1960).

mit

$${}_{1g}^{kl} W = \begin{pmatrix} -2 W_{,123} & W_{,113} - W_{,223} & W_{,112} + W_{,222} \\ W_{,113} - W_{,223} & 2 W_{,123} & -W_{,111} - W_{,122} \\ W_{,112} + W_{,222} & -W_{,111} - W_{,122} & 0 \end{pmatrix} \quad (22a)$$

$${}_{1g}^{kl} V = \begin{pmatrix} -2 V_{,123} & V_{,113} + V_{,333} & V_{,112} - V_{,233} \\ V_{,113} + V_{,333} & 0 & -V_{,111} - V_{,133} \\ V_{,112} - V_{,233} & -V_{,111} - V_{,133} & 2 V_{,123} \end{pmatrix}. \quad (22b)$$

Man bemerke zum Vergleich, daß im Gegensatz zu dieser Form die in II angegebenen Formeln das Feld  ${}_{1g}^{\mu\nu}$  mittels zweiter Ableitungen von zwei willkürlichen Wellenfunktionen ausdrücken.

Berlin, Institut für Reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften, z. Z. Paris, Institut Henri Poincaré.

Bei der Redaktion eingegangen am 16. Februar 1961.

# ***Ionisation und Energieverlust von $\alpha$ -Teilchen in verschiedenen Gasen***

*Von W. Riezler und H. Schepers*

Mit 6 Abbildungen

## **Inhaltsübersicht**

Für die Gase: Luft, He, Ne, A, Kr, Xe, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO, CO<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>, C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> und C<sub>4</sub>H<sub>10</sub> werden mit Th C'  $\alpha$ -Teilchen (8,78 MeV) die Braggkurve und das Glimmer-Äquivalentgewicht in Abhängigkeit von der Energie gemessen.

Aus den Meßergebnissen lassen sich für die untersuchten Gase folgende Werte ermitteln:

Extrapolierte Reichweite und mittlere Reichweite, mittleres relatives Bremsvermögen.

Relatives Bremsvermögen als Funktion der Restreichweite in Luft.

Die in der Bethe-Formel auftretende Größe I (mittleres Anregungspotential).

Die Energie-Reichweite-Beziehungen.

Der Energieverlust  $\frac{dE}{dR}$  als Funktion der Restreichweite in Luft.

Die Messungen haben ergeben, daß man bei den Molekülgasen einschließlich der Kohlenwasserstoffe bei Energien von rund 4 MeV an aufwärts das Bremsvermögen additiv aus den atomaren Bremsvermögen der Atome zusammensetzen kann.

## **Einleitung**

W. Riezler und A. Rudloff<sup>1)</sup> hatten für verschiedene Gase das Bremsvermögen, den Energieverlust pro Wegeinheit und die Energie-Reichweite-Beziehung für Polonium  $\alpha$ -Teilchen gemessen. Ziel der vorliegenden Arbeit war es, diese Untersuchungen auf  $\alpha$ -Teilchen mit höherer Energie auszudehnen.

Die früheren Ergebnisse waren in bezug auf die Additivität der Bremsvermögen bei den Kohlenwasserstoff-Gasen unbefriedigend gewesen und sollten nachgeprüft werden, nachdem es jetzt möglich war, die Gase in reinerer Form zu beziehen und genauer zu analysieren.

Untersucht wurden die Gase Luft, He, Ne, A, Kr, Xe, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO, CO<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>, C<sub>3</sub>H<sub>8</sub>, C<sub>4</sub>H<sub>10</sub>.

<sup>1)</sup> W. Riezler u. A. Rudloff, Ann. Physik 15, 224 (1955).

## **Versuchsanordnung und Meßmethode**

Abb. 1 zeigt eine Skizze der Versuchsanordnung. Sie entspricht im wesentlichen der von Riezler und Rudloff<sup>1)</sup> verwendeten Anordnung, die dort – ebenso wie die Meßmethode – ausführlich beschrieben ist.

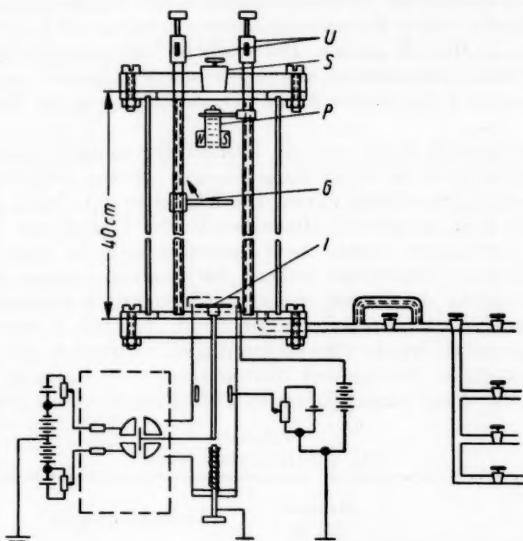


Abb. 1. Skizze der Versuchsanordnung:  $U'$  — Umdrehungszähler,  $S$  — Schliff,  $P$  — Präparaträger mit Blende und Permanentermagnet,  $G$  — Glimmerfolie,  $I$  — Ionisationskammer

Der Kammerzylinder ist hier aus Glas. Das Präparat (*P*) mit dem Blendensystem und die Glimmerfolie (*G*) sind über Spindeln verschiebbar, die jeweilige Stellung ist an Umdrehungszählern abzulesen. Die Glimmerfolie ist an jeder beliebigen Stelle in den Strahlengang einzuklappen.

Nach Einbringen des Präparates durch den Glasschliff wird die Kammer leergepumpt und Endvakuum und Dichtigkeit mit einem thermoelektrischen Vakuummeter überprüft. Dann wird über Trockengefäße das Gas bis zum Solldruck eingelassen. Das Ende der Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen sollte kurz vor dem Maximalabstand Präparat-Ionisationskammer (I) liegen. Am plötzlichen Verschwinden des Ionisationsstromes ist gut zu sehen, wann dieser Druck erreicht ist.

Der verwendete  $\alpha$ -Strahler war  $\text{Po}^{212}$  (Th C') mit einer Energie von 8,78 MeV und einer mittleren Reichweite in Luft von 8,57 cm.

Die Präparate wurden durch elektrische Abscheidung der Folgeprodukte der Thorium-Emanation aus einem hochemanierenden Trockenpräparat auf einen Platinträger gewonnen<sup>2).</sup>

<sup>2)</sup> O. Erbacher, K. Philipp u. K. Donat, Physik. Z. 30, 913 (1929).

Der Strom in der mit einer dünnen Goldfolie abgedeckten Ionisationskammer wurde mit einem Lindemann-Elektrometer in Kompensations schaltung gemessen. Der Strom setzt sich zusammen aus Ionisationsstrom  $i$ , hervorgerufen durch das  $\alpha$ -Strahlbündel und einem Untergrundstrom, nämlich Ionisationsstrom durch  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen und etwaige Kriechströme über die Isolatoren. Der Einfluß der  $\beta$ -Strahlung konnte durch Ablenkung der Elektronen im Magnetfeld eines Permanentmagneten ausgeschaltet werden, dessen Polschuhe um die Blende greifen. Der restliche Untergrundstrom mußte gemessen und vom Gesamtstrom abgezogen werden. Hierzu wurden jeweils die  $\alpha$ -Strahlen durch ein dünnes Aluminiumplättchen vor der Blende zurück gehalten.

Besondere Sorgfalt wurde auf die Beschaffung reinster Gase verwendet. Die meisten konnten in so reiner Form bezogen werden, daß die Verunreinigungen vernachlässigbar klein waren. Die hierbei in der Tab. 1 angegebenen Reinheitsgrade sind garantierte Mindestwerte der Lieferfirma. Bei Methan, Propan und Kohlenoxyd waren die Verunreinigungen so groß, daß sie die Meßergebnisse etwas beeinflussen mußten. Bei diesen drei Gasen wurden daher die Analysenangaben der Firmen massenspektrometrisch überprüft. Die notwendige Korrektur zum Bremsvermögen ist in der Tab. 1 angegeben.

Als Trockenmittel wurde Phosphorpentoxyd verwendet. Die sehr nassen Kohlenwasserstoffgase wurden mit Natronasbest vorgetrocknet. Wasserstoff wurde durch die Wand eines glühenden Palladiumröhrechens geleitet.

Tabelle 1  
Die untersuchten Gase

		Reinheit in %	Verunreinigungen	Korrektur zum Brems vermögen
Helium	He	100		
Neon	Ne	99,99		
Argon	A	100		
Krypton	Kr	99,9	0,05% Rest	N <sub>2</sub> Xe
Xenon	Xe	99,9	0,05% Rest	N <sub>2</sub> Kr
Wasserstoff	H <sub>2</sub>	100		
Stickstoff	N <sub>2</sub>	99,9	Rest	A
Sauerstoff	O <sub>2</sub>	99,8	Rest	A u. N <sub>2</sub>
Kohlenoxyd	CO	98,6	0,8% 0,6%	CO <sub>2</sub> CH <sub>4</sub>
Kohlendioxyd	CO <sub>2</sub>	99,99		- 0,3%
Methan	CH <sub>4</sub>	98,2	0,7% 0,5% Rest O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> N <sub>2</sub> CO, CH <sub>2</sub>
Äthan	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	99,98		+ 0,5%
Propan	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	95,7	1,4% 2,9%	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>
Butan	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	99,98		+ 0,6%

### Messung der Braggkurve

Da die Ionisationskammertiefe  $d$  als klein gegenüber der Gesamtreichweite innerhalb der Kammer angesehen werden kann, bedeutet  $i/d$  die spezifische

iationsstrom  $i$ , ähnlich wie die  $\alpha$ -Strahlung. Der  $\alpha$ -Strahl wird in einem Kammermitte-Präparat bei dem jeweiligen Druck  $p$  und der Temperatur  $T$  auf die üblichen Normalbedingungen (15 °C und 760 mm Hg) umgerechnet.

Aus diesen Messungen erhält man nach Berücksichtigung des Luftbeziehungsweise Gasäquivalents der Goldfolie die Braggkurve. Aus ihr läßt sich jeweils die „extrapolierte Reichweite“, die „mittlere Reichweite“ und das mittlere Bremsvermögen ermitteln. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 zusammenge stellt.

#### Messung des Luftäquivalents der Gase

In einer zweiten Meßreihe wurde das Bremsvermögen der ein-

Tabelle 2  
Gemessene Werte für Reichweiten und Bremsvermögen für  $\alpha$ -Teilchen von 8,78 MeV

Gas	Extrapolierte Reichweite in cm	Mittlere Reichweite in cm	Mittleres Bremsvermögen
Meßgenauigkeit	$\pm 0,2\%$	$\pm 0,3\%$	$\pm 0,6$
Luft	8,62	8,53	1
He	49,20	48,60	0,176
Ne	14,18	13,96	0,661
A	9,04	8,94	0,955
Kr	5,98	5,91	1,44
Xe	4,52	4,47	1,91
$H_2$	40,9	39,9	0,214
$N_2$	8,78	8,69	0,982
$O_2$	8,10	8,01	1,064
CO	8,82	8,74	0,978
$CO_2$	5,72	5,66	1,51
$CH_4$	10,02	9,92	0,860
$C_2H_6$	5,74	5,68	1,502
$C_3H_8$	4,04	4,00	2,14
$C_4H_{10}$	3,10	3,05	2,80

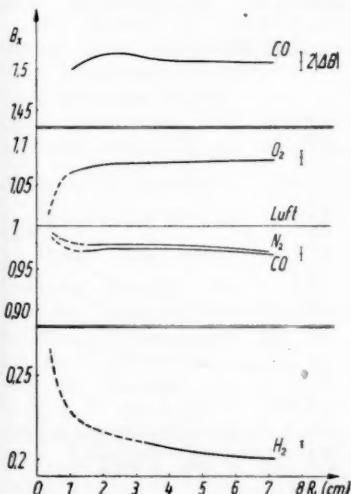


Abb. 2. Bremsvermögen als Funktion der Restreichweite in Luft. ——— nach Riezler und Rudloff

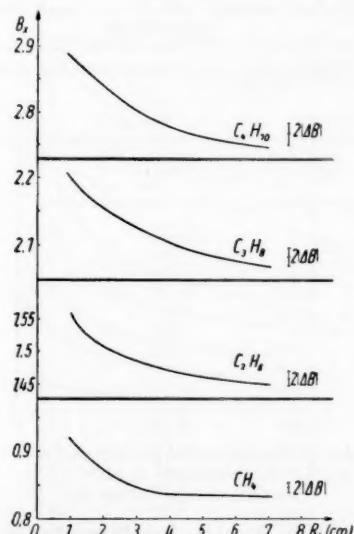


Abb. 3. Bremsvermögen als Funktion der Restreichweite in Luft

zernen Gase und seine Abhängigkeit von der Energie der  $\alpha$ -Teilchen bestimmt. Nach einer Methode, die Riezler<sup>3)</sup> zuerst anwandte, wird das Gasäquivalent einer Glimmerfolie mit dem Luftäquivalent dieser Folie bei derselben Teilchenenergie verglichen und das Bremsvermögen relativ zu Luft berechnet. Setzt man die Energie-Reichweite-Beziehung in Luft als bekannt voraus<sup>4)5)</sup>, so läßt sich durch ein Näherungsverfahren auch die Energie-Reichweite-Beziehung für die einzelnen Gase und der Energieverlust pro Wegeinheit in Abhängigkeit von der Energie ermitteln. Die gemessenen relativen Bremsvermögen sind in den Abbildungen 2 bis 4, der Energieverlust pro Wegeinheit für die Edelgase und die Kohlenwasserstoffe in den Abbildungen 5 und 6 dargestellt.

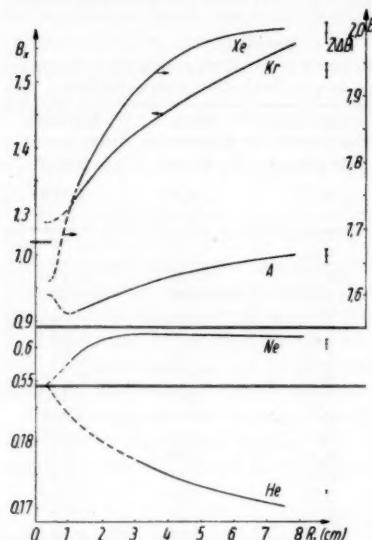


Abb. 4. Bremsvermögen als Funktion der Restreichweite in Luft. - - - nach Riezler und Rudloff

**Diskussion der Meßergebnisse und Vergleich mit der Theorie**

In nichtrelativistischer Näherung beschreibt die Bethe-Formel den spezifischen Energieverlust eines

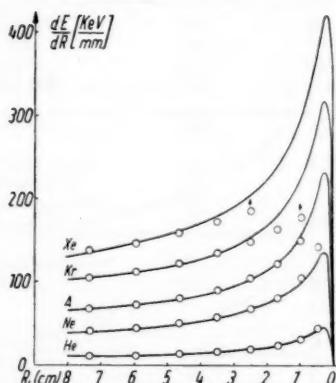


Abb. 5. Energieverlust pro mm als Funktion der Restreichweite in Luft. ○ ○ ○ berechnet nach Formel (1)

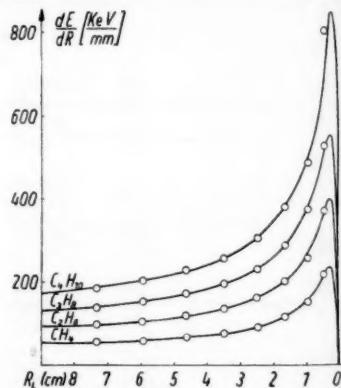


Abb. 6. Energieverlust pro mm als Funktion der Restreichweite in Luft. ○ ○ ○ berechnet nach Formel (1)

<sup>3)</sup> W. Riezler, Ann. Physik **35**, 350, 354 (1939).

<sup>4)</sup> M. G. Holloway u. M. S. Livingston, Physic. Rev. **54**, 18 (1938).

<sup>5)</sup> W. P. Jesse u. J. Sadauskis, Physic. Rev. **78**, 1 (1950).

geladenen schweren Teilchens bei Durchgang durch Materie<sup>6)</sup>:

$$-\frac{dE}{dR} = \frac{2 \pi Z N e^2 e_s^2 m_s/m}{E} \ln \frac{4E}{Z m_s/m} . \quad (1)$$

$e$  — Elementarladung,

$m$  — Elektronenmasse,

$E$  — kinetische Energie des stoßenden Teilchens,

$e_s$  — Ladung des stoßenden Teilchens,

$m_s$  — Ruhemasse des stoßenden Teilchens,

$N$  — Zahl der Atome pro Volumeneinheit der Bremssubstanz,

$R$  — Restreichweite,

$Z$  — Ordnungszahl der Bremssubstanz,

$ZI$  — mittlere Anregungsenergie der Bremssubstanz.

In höherer Näherung tritt zu dem logarithmischen Glied noch eine Größe  $C_K(E, Z)$  hinzu, die vor allem bei kleinen Geschwindigkeiten berücksichtigt, daß der Anteil der  $K$ -Elektronen am Energieverlust kleiner wird.

Drückt man zur numerischen Auswertung  $E$  in MeV,  $\frac{dE}{dR}$  in  $\frac{\text{keV}}{\text{mm}}$ ,  $I$  in eV aus und geht zum dekadischen Logarithmus über, so ergibt sich für Gase unter Normalbedingungen:

$$\frac{dE}{dR} = 22,27 \frac{Z}{E} n \left( \log E + K_I + \frac{C_K}{2,3 Z} \right) .$$

Hierbei ist  $n$  die Zahl der Atome pro Molekül und  $Z$  die gemittelte Zahl der Elektronen pro Atom.

$$K_I = \log \frac{4 \cdot 10^6}{Z I m_s/m} .$$

Für  $\alpha$ -Teilchen ist  $K_I = \log \frac{548,2}{Z I} .$

Die Größe  $I$ , die durch die Ordnungszahl dividierte mittlere Anregungsenergie, ist als einzige unbekannt. Für diese gibt es, außer beim Wasserstoff, keine brauchbare Theorie.  $I$  wird dem Experiment entnommen, indem man sie aus den gemessenen  $\frac{dE}{dR}$  berechnet.

Zur Berechnung wurden

$\frac{dE}{dR}$ -Werte bei hohen Energien gewählt, da

hier die Näherung der

Gleichung (1) am besten

ist. Die  $C_K$ -Werte wurden den Kurven von

Walske<sup>7)</sup> entnommen.

Die berechneten  $I$ -Werte

sind in Tab. 3 aufge-

führt.

Tabelle 3

Gas	$\bar{Z}$	$I$ (eV)	$\frac{\Delta I}{I}$ (%)
Luft	7,22	11,13	4
He	2	17,96	5
Ne	10	12,53	3,4
A	18	10,98	3,2
Kr	36	11,05	2,4
Xe	54	9,8	2,0
$H_2$	1	16,5	6
$N_2$	7	11,55	4
$O_2$	8	11,36	4
CO	7	11,63	4
$CO_2$	7,35	15,95	4
$CH_4$	2	20,83	4,5
$C_2H_6$	2,25	20,6	4,5
$C_3H_8$	2,36	20,3	4
$C_4H_{10}$	2,43	18,7	4,5

<sup>6)</sup> H. A. Bethe, Rev. mod. Physics 22, 217 (1950).

<sup>7)</sup> M. G. Walske, Physic. Rev. 88, 1283 (1952).

Der relative Fehler von  $I$  ist in erster Näherung

$$\frac{dI}{I} = \frac{57}{nZ} dB.$$

Kleine Fehler im Bremsvermögen ergeben also — vor allem bei kleinen  $Z$  — schon sehr große Fehler in  $I$ .

Die entsprechenden Fehler für  $I$  sind ebenfalls in Tab. 3 angegeben.

### Vergleich der Bethe-Formel mit dem Experiment

In Abb. 5 sind die gemessenen Energieverlustkurven für die Edelgase gezeichnet. Gleichzeitig sind als Punkte die nach Formel (1) sich ergebenden Werte eingetragen. Im Gültigkeitsbereich der Formel (1) ( $v > \frac{Z e^2}{h}$ ) ist die Übereinstimmung der theoretischen und gemessenen Werte gut.

Für die Kohlenwasserstoff-Gase (Abb. 6) liefert die Formel Werte, die bis zu einer Energie von 1,5 MeV innerhalb der Fehlertoleranzen mit den gemessenen übereinstimmen.

### Additivität der Bremsvermögen

Solange die Atome in verschiedenen Molekülen nicht wesentlich verschieden gebunden sind, muß man erwarten, daß sich das Bremsvermögen der Moleküle additiv aus dem Bremsvermögen der einzelnen Atome zusammensetzen läßt. Riezler und Rudloff<sup>1)</sup> haben gefunden, daß für die Gase NO, N<sub>2</sub>O, CO, CO<sub>2</sub> und NH<sub>3</sub> das Additivitätsgesetz bei nicht zu kleinen Energien gut erfüllt ist. Für die Kohlenwasserstoffe erhielten sie kein befriedigendes Ergebnis. Es ist zu vermuten, daß der Reinheitsgrad der dort benutzten Kohlenwasserstoff-Gase nicht ausreichend war; er war im Gegensatz zu den hier vorliegenden Messungen nur mit Hilfe der Gasdichte kontrolliert worden. Berechnet man bei den in der vorliegenden Arbeit gemessenen Gasen CH<sub>4</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>, C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> und C<sub>4</sub>H<sub>10</sub> aus jeweils immer einem Paar das atomare Bremsvermögen für C<sub>gesättigt</sub> und H<sub>gesättigt</sub> und bildet den Mittelwert, so ergeben sich die in Tab. 4 aufgeführten Werte für die verschiedenen Restreichweiten. In der Tabelle sind außerdem die Werte für B<sub>C</sub> und B<sub>H</sub> aus H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO und CO<sub>2</sub> angegeben.

Tabelle 4  
Bremsvermögen für C und H  
(Luft-„Molekül“ = 1)

$R_L$ (cm) $E$ (MeV)	3 1,68	4 2,52	5 3,52	6 4,66	7 5,95
C <sub>ges</sub>	0,434	0,429	0,424	0,420	0,419
C (aus CO - $\frac{1}{2}$ O <sub>2</sub> )	0,437	0,4360	0,434	0,431	0,428
C (aus CO <sub>2</sub> -O <sub>2</sub> )	0,438	0,437	0,433	0,430	0,430
H <sub>ges</sub>	0,105	0,104	0,103	0,103	0,103
H (aus $\frac{1}{2}$ H <sub>2</sub> )	0,106	0,104	0,103	0,101	0,100

In Tab. 5 sind für Kohlenwasserstoff  $B_{\text{add}}$  und  $B_{\text{gem}}$  verglichen. Innerhalb der Meßgenauigkeit stimmen die Werte gut überein. Nur bei Butan scheint das gemessene Bremsvermögen etwas höher zu liegen, als nach dem Additivitätsgesetz zu erwarten wäre.

Tabelle 5  
Berechnete und gemessene Bremsvermögen

$R_L$ (cm) $E$ (MeV)	3 1,68	4 2,52	5 3,52	6 4,66	7 5,95
CH <sub>4</sub>	$B_{\text{add}}$ 0,854	0,845	0,836	0,832	0,831
	$B_{\text{gem}}$ 0,848	0,838	0,836	0,835	0,834
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	$B_{\text{add}}$ 1,498	1,482	1,466	1,458	1,456
	$B_{\text{gem}}$ 1,490	1,471	1,461	1,454	1,450
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	$B_{\text{add}}$ 2,242	2,119	2,096	2,084	2,081
	$B_{\text{gem}}$ 2,126	2,104	2,089	2,077	2,070
C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	$B_{\text{add}}$ 2,786	2,756	2,726	2,710	2,706
	$B_{\text{gem}}$ 2,803	2,778	2,763	2,754	2,748

Phelps und Mitarbeiter<sup>8)</sup> haben u. a. für C<sub>ges</sub> und H<sub>ges</sub> Bremsvermögen berechnet und an verschiedenen organischen Folien gemessen. Sie erhalten für 6 MeV  $\alpha$ -Teilchen:

$$\begin{array}{ll} \text{H}_{\text{ges}}: 0,102 & \text{C}_{\text{ges}}: 0,418 \\ \text{(aus Tab. 4: } 0,103 & : 0,420) \end{array}$$

Die Übereinstimmung mit den hier gemessenen Werten ist also sehr gut.

Dies scheint zu bestätigen, daß das Bremsvermögen von Substanzen im betrachteten Energiebereich innerhalb der Fehlengrenzen unabhängig davon ist, ob sie in fester, flüssiger oder gasförmiger Form vorliegen.

Dies muß nicht für kleinere Energien gelten, wo Neufeld<sup>9)</sup> zeigt, daß gegen Ende der Reichweite im Umladungsgebiet die mittlere Ladung des stoßenden Teilchens mit zunehmender Dichte der durchstrahlten Materie durch „Autoionisation“ zunimmt. Der höheren mittleren Ladung entsprechend ist auch das Bremsvermögen größer.

<sup>8)</sup> J. Phelps, W. F. Huebner u. F. Hutchinson, Physic. Rev. **95**, 441, (1954).

<sup>9)</sup> J. Neufeld, Physic. Rev. **96**, 1470 (1954).

Bonn, Institut für Strahlen- und Kernphysik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 9. Januar 1961.

## Dispersion der komplexen Permeabilität an Lithiumferrit

Von Friedrich Voigt

Die Anfangspermeabilität beruht auch in weichmagnetischen Ferriten auf Blochwandverschiebungen und Drehprozessen, deren Frequenzabhängigkeit zu ausgeprägten Dispersionserscheinungen führen kann. Rado<sup>1)</sup> fand bei Lithiumferrit zwei Dispersionsgebiete. Zur Beeinflussung der beiden an Lithiumferrit auftretenden Dispersionsgebiete wurde in einer früheren Arbeit<sup>2)</sup> senkrecht zum magnetischen Wechselfeld ein magnetisches Gleichfeld angelegt und die transversale komplexe Suszeptibilität bestimmt. Da inzwischen von Folen<sup>3)</sup> die Kristallanisotropiekonstante von Lithiumferrit  $\text{Li}_{0,55}\text{Fe}_{2,45}\text{O}_4$  im geordneten und ungeordneten Zustand<sup>4)</sup> bestimmt worden ist, erscheint es angebracht, die Messungen unter diesem neuen Aspekt zu diskutieren.

Bei negativer Kristallanisotropiekonstante kann die Wirkung der Kristallenergie durch ein effektives Feld charakterisiert werden, das sich nach:

$$H_e = \frac{4}{3} K_1 / M_s$$

berechnen lässt.

$K_1$ : Konstante der Kristallenergie erster Ordnung,

$M_s$ : Spontane Magnetisierung.

Dies effektive Feld führt bei Vernachlässigung von inneren Spannungen und inneren entmagnetisierenden Feldern zu einer natürlichen ferrimagnetischen Resonanzfrequenz:

$$f_D = (\gamma/2\pi) H_e$$

wobei  $\gamma$  das magnetomechanische Verhältnis ist. Der auf Drehprozessen beruhende Anteil der Anfangspermeabilität beträgt bei polykristallinem Ferritmaterial:

$$\mu_D - 1 = 2/3 \frac{4\pi M_s}{H_e}.$$

Durch teilweise Ausrichtung der magnetischen Momente kann der Mittlungsfaktor 2/3 vergrößert werden. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die an Lithiumferrit bei 18 °C gemessenen und berechneten Werte.

$M_s$ Gauß	$K_1$ <sup>3)</sup> erg cm <sup>3</sup>	He Oe	$(\mu - 1)$ experiment.	$(\mu_D - 1)$	Lage des Absorptions- max. in MHz im UKW Bereich	im Dezimeter- bereich	$f_D$ MHz
242	- 86000	475	28,7	4,3	60	2000	1300

1) G. T. Rado, Rev. mod. Physics **25**, 81 (1953).

2) F. Voigt, Ann. Physik 7. Folge, Bd. 1, S. 86 (1958).

3) V. J. Folen, J. appl. Phys. **31**, 166 S (1960).

4) P. B. Braun, Nature **170**, 1123 (1952).

Der berechnete und der gemessene Wert für die Anfangspermeabilität unterscheiden sich beträchtlich. Bei niedrigen Frequenzen und im Dispersionsgebiet um 60 MHz tragen demnach bei Lithiumferrit die Blochwandverschiebungen viel mehr zur Anfangspermeabilität als die Drehprozesse bei. Durch das transversale Magnetfeld werden offensichtlich diejenigen Blochwände beseitigt, die nur wenig in ihren Vorzugslagen festgehalten werden und infolge ihrer geringen Bindung am Anfang des Dispersionsgebietes in Resonanz kommen. Das Absorptionsgebiet wird abgeflacht und nach höheren Frequenzen verschoben. Das Vorhandensein des ersten Dispersionsgebietes bei inneren transversalen Feldern von einigen Hundert Oersted zeigt, wie fest teilweise die Blochwände haften.

Jena, Institut für Magnetische Werkstoffe der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 2. November 1960.

# **Kerninduktionsuntersuchungen an strömenden Proben**

*Von Wolfgang Herms*

## **Inhaltsübersicht**

Es werden Kerninduktionssignale von laminar durch ein zylindrisches Rohr strömenden Proben untersucht. Insbesondere werden Größe und Form des Absorptionssignals in Abhängigkeit von Strömungsgeschwindigkeit, Spin-Gitter-Relaxationszeit und Geometrie der Anordnung angegeben. Außerdem wird über Möglichkeiten diskutiert, Strömungsdoppelbrechung mittels Kerninduktion nachzuweisen.

### **1. Einleitung**

Die vorliegende Arbeit diente der Untersuchung der Frage, ob der Effekt der Strömungsdoppelbrechung mit den Mitteln der Kerninduktionsmethode nachgewiesen werden kann. Es war zu erwarten, daß eine Orientierung der Moleküle zu einer Änderung des mittleren zweiten Moments  $\bar{J}H^2$  führt. Jedoch ergibt schon eine aus isotropen Teilchen bestehende strömende Flüssigkeit andere Kerninduktionssignale als in ruhendem Zustand.

Damit der bei anisotropen Teilchen auftretende Orientierungseffekt genauer untersucht werden konnte, mußten zunächst die Erscheinungen theoretisch und experimentell geklärt werden, die schon bei isotropen Teilchen zu beobachten sind. Insbesondere waren Form und Amplitude des Absorptionssignals in Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern, wie Strömungsgeschwindigkeit und Spulenlänge, allgemein zu berechnen und experimentell zu überprüfen.

Die Ergebnisse sind dann nicht nur bei Untersuchungen der Strömungsdoppelbrechung von Interesse, sondern auch bei anderen Kerninduktionsmessungen an strömenden Flüssigkeiten, wie z. B. Überwachung von Destillationsprozessen oder Kontrolle des Verhältnisses von  $H_2O$  zu  $D_2O$  in der Kerntechnik.

### **2. Kerninduktion an strömenden isotropen Flüssigkeiten**

Während im allgemeinen Kerninduktionsmessungen an ruhenden Proben erfolgen, sollen hier Proben untersucht werden, die in einem Glasrohr durch die Probespule strömen. Das Schema einer dafür geeigneten Anordnung zeigt folgenden Aufbau: Die Probesubstanz, die durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt fließt, kommt aus dem feldfreien Außenraum, legt im  $H_0$ -Feld den Weg  $l_0$  zurück und strömt dann durch eine Probespule der Länge  $l_1$ . Die Überlegungen werden damit auf Anordnungen mit nur einer Spule beschränkt.

Zunächst wird die Magnetisierung  $M_0$  berechnet, die ein Probeelement bei Eintritt in die Probespule besitzt. Dann werden die Blochschen Gleichun-

gen für ein durch die Spule bewegtes Probeelement gelöst, und man erhält durch zeitliche Mittlung das Absorptionssignal  $v$  für das betrachtete Probeelement. Durch eine Integration über den Rohrquerschnitt erhält man das zu beobachtende Absorptionssignal  $\bar{v}$  der Probe in Abhängigkeit von den Parametern Strömungsgeschwindigkeit  $w$ , Spulenlänge  $l_1$ , Strecke  $l_0$  im  $H_0$ -Feld, Relaxationszeiten  $T_1$  und  $T_2$ , Feldstärken  $H_0$  und  $H_1$  und der Sättigungsmagnetisierung  $M$ .

Es wird versucht, eine Lösung der Blochschen Gleichungen für den Fall zu finden, daß die Probesubstanz in einem Rohr durch die Probespule strömt. Eine gebräuchliche Form<sup>1)</sup> der Blochschen Gleichungen für den allgemeinen Fall ist

$$\dot{u} + \frac{u}{T_2^*} + \Delta\omega \cdot v = 0, \quad (1a)$$

$$\dot{v} + \frac{v}{T_2^*} - \Delta\omega \cdot u = -|\gamma| H_1 M_z, \quad (1b)$$

$$\dot{M}_z - \frac{M_z}{T_1} - |\gamma| v_1 H_1 = \frac{M}{T_1}. \quad (1c)$$

Hierbei sind  $u$ ,  $v$ ,  $M$ ,  $M_z$ ,  $H_1$ ,  $H_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2^*$  und  $\Delta\omega$  in der üblichen Weise definiert.

Zunächst wird ein Probeelement betrachtet, das aus dem feldfreien Außenraum kommend mit der konstanten Geschwindigkeit  $w$  durch das  $H_0$ -Feld strömt, und die bei Eintritt in die Probespule vorhandene Magnetisierung  $M_0$  berechnet

$$M_0 = M \left( 1 - e^{-\frac{l_0}{w T_1}} \right). \quad (2)$$

Dann wird das Verhalten der Magnetisierung für den Fall untersucht, daß die Probe mit der Geschwindigkeit  $w$  durch das dem  $H_0$ -Feld überlagerte  $H_1$ -Feld strömt. Um überhaupt Signale beobachten zu können, muß gefordert werden

$$T_2^* \ll \frac{l_1}{w}. \quad (3)$$

Wenn man die Untersuchungen auf den langsamsten Durchgang beschränkt, so gilt  $T_2^* \ll T_m$ , wobei unter  $T_m$  die Modulationszeit zu verstehen ist. Hieraus folgt  $\dot{u} = \dot{v} = 0$ . Im Gegensatz zum Fall, daß die Probe ruht, gilt aber  $M_z \neq 0$ . Das Gleichungssystem (1) vereinfacht sich nun zu

$$\frac{u}{T_2^*} + \Delta\omega \cdot v = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{v}{T_2^*} - \Delta\omega \cdot u = -|\gamma| H_1 M_z, \quad (4b)$$

$$\dot{M}_z + \frac{M_z}{T_1} - |\gamma| v H_1 = \frac{M}{T_1}. \quad (4c)$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man die Magnetisierung zum Zeitpunkt  $t$  nach Eintritt der Probe in die Spule

$$M_z(t) = M \left( 1 - \frac{1}{A} - e^{-\frac{l_0}{w T_1}} \right) e^{-\frac{A}{T_1} t} + \frac{M}{A}, \quad (5)$$

1) A. Lösche, Kerninduktion, Berlin 1957.

wobei zur Abkürzung geschrieben wird

$$A = \frac{1 + (A\omega)^2 T_2^{*2} + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^*}{1 + (A\omega)^2 T_2^{*2}}. \quad (6)$$

Durch Einsetzen von (5) in (4a, b) kommt man zu

$$v(t) = B \left[ \left( 1 - \frac{1}{A} - e^{-\frac{l_0}{w T_1}} \right) e^{-\frac{A}{T_1} t} + \frac{1}{A} \right] \quad (7)$$

mit der Abkürzung

$$B = \frac{|\gamma| H_1 T_2^* M}{1 + (A\omega)^2 T_2^{*2}}. \quad (8)$$

Hieraus erhält man durch zeitliche Mittlung das Absorptionssignal

$$v = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} v(t) dt, \quad (9)$$

wobei  $t_1 = \frac{l_0}{w}$  die Zeit ist, in der ein Probeelement durch die Spule strömt. Es ergibt sich

$$v = \frac{B}{A} \left[ 1 + \left( \frac{A-1}{A} - e^{-\frac{l_0}{w T_1}} \right) \frac{w T_1}{l_0} \left( 1 - e^{-\frac{A l_0}{w T_1}} \right) \right]. \quad (10)$$

Bei der laminaren Strömung der Probe durch ein Rohr ist aber die Strömungsgeschwindigkeit  $w$  nicht konstant, sondern sie ist abhängig vom Abstand von der Rohrachse in der Form

$$w(r) = w_m \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (11)$$

wobei  $w_m$  = Geschwindigkeit in der Rohrachse,

$R$  = Rohrradius,

$r$  = Abstandsvariable von der Rohrachse aus.

Mit  $\varrho = \frac{r}{R}$  ergibt sich  $w(\varrho) = w_m (1 - \varrho^2)$ . (12)

Um das experimentell nachweisbare Signal  $v$  zu erhalten, muß man  $v$  über den Rohrquerschnitt mitteln.

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 v(\varrho) 2\pi \varrho d\varrho. \quad (13)$$

Hieraus erhält man

$$\bar{v} = \frac{B}{A} \left[ 1 - \frac{T}{2} \frac{A-1}{A} - \frac{T-\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{T}} - \frac{A-1}{A} \frac{T-A}{2} e^{-\frac{T}{A}} + \frac{T-A-\lambda}{2} e^{-\frac{A+\lambda}{T}} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{2T} E i \left( -\frac{\lambda}{T} \right) + \frac{A-1}{A} \frac{A^2}{2T} E i \left( -\frac{A}{T} \right) - \frac{(A+\lambda)^2}{2T} E i \left( -\frac{A+\lambda}{2T} \right) \right], \quad (14)$$

wobei  $T = \frac{w_m}{l_0} \cdot T_1$

$$\lambda = \frac{l_0}{l_1}$$

$$- E i(-c) = \int_c^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \text{ (Integral-Logarithmus).}$$

Die Amplitude des Absorptionssignals ergibt sich dann mit

$$(6) \quad \frac{1}{S} = 1 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^* \text{ zu}$$

$$(7) \quad \bar{v}_{\max} = S |\gamma| H_1 T_2^* M \left[ 1 + \frac{T}{2} (1 - S) - \frac{T - \lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{T}} - \frac{1 - S}{S} \frac{ST - 1}{2} e^{-\frac{1}{ST}} \right.$$

$$(8) \quad + \frac{T - \lambda - \frac{1}{S}}{2} e^{-\frac{s\lambda + 1}{sT}} + \frac{\lambda^2}{2T} E i\left(-\frac{\lambda}{T}\right) - \frac{1 - S}{S} \frac{1}{2ST} E i\left(-\frac{1}{ST}\right) \quad (15)$$

$$- \frac{\left(\lambda + \frac{1}{S}\right)^2}{2T} E i\left(-\frac{S\lambda + 1}{ST}\right) \left. \right].$$

(9) Zur Verifizierung der Gleichung (14) werden nun einige spezielle Fälle untersucht.

Fall 1: Ruhende Probe mit Sättigung.

Da  $T = 0$  und auch  $\lim_{x \rightarrow 0} Ei(-x) = 0$  gilt, erhalten wir

$$(10) \quad \bar{v} = \frac{B}{A} = \frac{|\gamma| H_1 T_2^* M}{1 + (\Delta\omega)^2 T_2^{*2} + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2^*}. \quad (16)$$

Das ist erwartungsgemäß die bekannte Form des Absorptionssignals für langsame Durchgang.

Fall 2: Probe strömend, Sättigung vernachlässigbar, Magnetisierung vor Erreichen der Spule gleich  $M$ .

Die Grenzübergänge  $\lambda \rightarrow \infty$  und  $A \rightarrow 1$  ergeben wie zu erwarten

$$(11) \quad \bar{v} = B = \frac{|\gamma| H_1 T_2^* M}{1 + (\Delta\omega)^2 T_2^{*2}}. \quad (17)$$

Fall 3: Probe strömend, Sättigung vorhanden, Magnetisierung vor Erreichen der Spule gleich  $M$ .

Nach dem Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  erhält man

$$(12) \quad \bar{v} = \frac{B}{A} \left[ 1 - \frac{A - 1}{A} \left( \frac{T}{2} - \frac{T - A}{2} e^{\frac{A}{T}} + \frac{A^2}{2T} E i\left(-\frac{A}{T}\right) \right) \right]. \quad (18)$$

Das infolge Sättigung verkleinerte Signal wird also größer, wenn ständig ungesättigte Probesubstanz nachströmt.

Fall 4: Probe strömend, Sättigung vernachlässigbar.

Um die Signalform für diesen Fall zu erhalten, muß man in Gleichung (17)  $A = 1$  setzen, und es ergibt sich

$$(13) \quad \bar{v} = \frac{B}{A} \left[ 1 - \frac{T - \lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{T}} + \frac{T - \lambda - 1}{2} e^{-\frac{\lambda + 1}{T}} \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{2T} E i\left(-\frac{\lambda}{T}\right) - \frac{(\lambda + 1)^2}{2T} E i\left(-\frac{\lambda + 1}{T}\right) \right]. \quad (19)$$

Obige Ableitung enthält einige Vernachlässigungen, auf die noch kurz hingewiesen werden soll. Voraussetzung für die Mittelwertbildung (13) ist, daß die Diffusion zwischen den sich mit verschiedener Geschwindigkeit bewegenden koaxialen Schichten vernachlässigbar ist. Bei starker Diffusion und auch bei

Turbulenz wird man mit einer mittleren Geschwindigkeit rechnen können. Weiterhin könnte man berücksichtigen, daß bei der Strömung der Probe durch die Spule eine teilweise Ausmittlung der Magnetfeldinhomogenitäten erfolgt. Es ist zu erwarten, daß dieser Effekt zu einer Vergrößerung von  $T_2$  und damit zu einer Linienverschmälerung führt.

Kerninduktionsuntersuchungen an strömenden Proben wurden schon von mehreren Autoren veröffentlicht. Nach einigen tastenden Versuchen von Suryan<sup>2)</sup> und Ganssen<sup>3)</sup> löste Antonowicz<sup>4)</sup> die Blochschen Gleichungen für den Fall, daß die Probeflüssigkeit mit über dem Querschnitt konstanter Geschwindigkeit durch die Probespule strömt, und erhielt für die Amplitude des Absorptionssignals die Näherungsformel

$$v_{\max} = - \frac{|\gamma| H_1 T_2}{T_1} M_0 \left( l_0 + \frac{l_1}{2} \right) \frac{1}{w} \quad (20)$$

$$- \frac{|\gamma| H_1 T_2}{T_1^2} M_0 \left[ l_0^2 + (1 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2) \left( \frac{l_1^2}{6} + \frac{l_0 l_1}{2} \right) \right] \frac{1}{w^2},$$

wobei die Bedingungen des langsamen Durchgangs gelten müssen und weiter gefordert wird  $\frac{l_1}{T_1} < 1$  und  $(1 + \gamma^2 H_1^2 T_1 T_2) < 1$ . In einer weiteren Arbeit<sup>5)</sup> versuchte Antonowicz durch Einführung von Effektivwerten von  $T_1$ ,  $T_2$  und  $M$  das Problem formal auf die Blochschen Gleichungen für ruhende Proben zu reduzieren.

Von anderen Autoren wurden Mehrspulenanordnungen beschrieben. So fand Hrynkiewicz<sup>6)</sup> eine plötzliche Änderung der Linienform beim Übergang von laminarer in turbulente Strömung. Eine solche Änderung ist nach Gleichung (14) zu erwarten, jedoch wurde sie nicht quantitativ berechnet.

### 3. Versuchsausführung und Ergebnisse

Um die durch Gleichung (15) beschriebenen Zusammenhänge genauer untersuchen zu können, wurde die relative Signalamplitude  $\frac{v_{\max}}{v_{\max,0}}$  in Abhängigkeit von  $T$  mit dem Sättigungsfaktor  $S$  als Parameter graphisch dargestellt. Der Wert von  $\lambda$  wurde durch die Geometrie der Versuchsanordnung festgelegt. Unter  $v_{\max,0}$  verstehen wir die Signalamplitude bei ruhender Probe.

Experimentell wurden Kurven  $\frac{v_{\max}}{v_{\max,0}}$  in Abhängigkeit von  $w$  aufgenommen und mit der oben beschriebenen graphischen Darstellung verglichen. Die Höhe des Maximums einer solchen Kurve ergab den jeweiligen Wert des Sättigungsfaktors  $S$ . Punkte gleicher Amplitude in der theoretischen und der experimentellen Kurve lieferte zusammengehörende Werte von  $T$  und  $w$ , aus denen bei bekannter Geometrie die Spin-Gitter-Relaxationszeiten  $T_1$  berechnet wurden. Aus den so bestimmten Werten von  $S$  und  $T_1$  konnte bei bekannten  $T_2^*$  die  $H_1$ -Feldstärke berechnet werden, bzw. bei bekannter  $H_1$ -Feldstärke der jeweilige Wert von  $T_2^*$ .

<sup>2)</sup> G. Suryan, Proc. Ind. Acad. Sci. A **33**, 107 (1951).

<sup>3)</sup> A. Ganssen, Z. Naturforschung **10g** 54 (1955).

<sup>4)</sup> K. Antonowicz, Bull. Acad. polonaise Sci. **5**, 813 (1957).

<sup>5)</sup> K. Antonowicz, Bull. Acad. polonaise Sci. **5**, 1069 (1957).

<sup>6)</sup> Hrynkiewicz, Acta physica polonica **XII**, 353 (1958).

Für die Messungen stand das in <sup>7)</sup> beschriebene Spektrometer zur Verfügung. Der Meßkopf mit  $l_0 = 112$  mm,  $l_1 = 16$  mm und  $R = 1,5$  mm war elektrisch heizbar, so daß auch höhermolekulare Stoffe (z. B. Paraffine) verflüssigt und untersucht werden konnten. Als Probesubstanzen dienten wäßrige  $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ -Lösungen verschiedener Konzentration, sowie Benzin, Leitungswasser und Hartparaffin. Die Ausströmgeschwindigkeit wurde aus Ausströmzeit (Stoppuhr) und Ausströmvolumen (Meßzylinder) bestimmt. Die Signale wurden auf einem Oszillographenschirm sichtbar gemacht, photographiert und später ausgewertet. Die experimentellen Ergebnisse zeigten völlige Übereinstimmung mit den Voraussagen der Formel (15). Die gemäß Gleichung (14) zu erwartende Änderung der Signalform wurde nicht untersucht.

#### 4. Kerninduktion und Strömungsdoppelbrechung

Ein Spezialfall strömender Flüssigkeit ist eine aus langkettigen Molekülen bestehende Flüssigkeit, und es ist zu untersuchen, ob die dabei auftretende Strömungsdoppelbrechung mittels Kerninduktion nachgewiesen werden kann. Alle bisherigen Untersuchungen der Strömungsdoppelbrechung erfolgten mit sichtbarem Licht, d. h. mit Frequenzen von etwa  $10^{15}$  Hz, die wesentlich größer sind als die Korrelationsfrequenzen in Flüssigkeiten (etwa  $10^{10}$  Hz). Demgegenüber liegen die Frequenzen von etwa  $10^7$  Hz, die uns für Kerninduktionsmessungen zur Verfügung stehen, beträchtlich unter den Korrelationsfrequenzen. Die Orientierung der einzelnen Moleküle der Flüssigkeit ist also während der Dauer einer Larmor-Periode starken Schwankungen unterworfen, und es dürfte schwierig sein, die Auswirkungen dieser Erscheinung theoretisch genau zu verfolgen. Allerdings dürften die Anisotropie-Effekte im wesentlichen ausgemittelt werden, wenn man sie mit Hilfe der Kerninduktionsmethode untersucht.

Man könnte aber versuchen, die mittels Couette-Apparatur orientierte Probe allmählich bis unter den Schmelzpunkt abzukühlen und auf diese Weise die Anisotropie in der Richtungsverteilung der Moleküllängsachsen „einzufrieren“, wobei aber eventuell die bestehende Ordnung im Moment der Erstarrung durch die freiwerdende Schmelzwärme zerstört wird <sup>8)</sup>. Mit Hilfe der von Peterlin und Stuart <sup>9)</sup> entwickelten Kontinuumstheorie der Strömungsdoppelbrechung wurde nach van Vleck <sup>10)</sup> das mittlere zweite Moment für eine solche Probe berechnet und es ergab sich für den Fall des starren Gitters und stäbchenförmiger Moleküle

$$\overline{\Delta H^2} = \frac{4}{5} \frac{M}{N} \sum_{j>k} r_{jk}^{-6} \left( 1 + \frac{1}{14} \frac{q}{D} \right), \quad (21)$$

wobei  $M = 895,2 \text{ Gauss}^2 \cdot \text{\AA}^6$  (für Protonen),

$N$  = Anzahl der Spins,

$r_{jk}$  = Abstand der Kerne  $j$  und  $k$ ,

$q$  = Geschwindigkeitsgefälle,

$D$  = Rotationsdiffusionskontante.

<sup>7)</sup> H. Lippmann, Dissertation Leipzig, 1957.

<sup>8)</sup> R. Köhler, Diplomarbeit, Leipzig, 1959.

<sup>9)</sup> A. Peterlin u. H. A. Stuart, Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik, Band 8/Ib, Leipzig 1943.

<sup>10)</sup> J. H. van Vleck, Physic. Rev. 74, 1168 (1949).

Für die Rechnung haben wir vorausgesetzt, daß die Probemoleküle starr sind und daß der intermolekulare Anteil am zweiten Moment vernachlässigt werden darf.

Gleichung (21) ist natürlich nur eine grobe Näherung, sie gestattet aber eine Abschätzung der Größenordnung des möglichen Effektes. Da experimentell nur  $\frac{q}{D}$ -Werte von etwa  $10^{-4}$  erreicht werden, ist es sehr unwahrscheinlich, daß Strömungsdoppelbrechung mit Kerninduktion nachgewiesen werden kann, zumal fraglich ist, ob es überhaupt gelingt, einen genau definierten anisotropen Zustand der Probe „einzufrieren“.

Versuche, den Effekt der Strömungsdoppelbrechung an mittels Couette-Apparatur „eingefrorenen“ Paraffinproben nachzuweisen, blieben wie zu erwarten ohne Erfolg.

Es bestehen auch sonst kaum Aussichten, Strömungsdoppelbrechung mittels Kerninduktion an strömenden Proben nachzuweisen, da die übrigen dabei auftretenden Effekte wesentlich größer sind und nicht genügend genau erfaßt werden können.

Herrn Prof. Dr. A. Lösche möchte ich für die Anregung zu dieser sehr interessanten Arbeit und stets hilfsbereites Interesse auch an dieser Stelle herzlich danken.

Leipzig, Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 10. Dezember 1960.

starr  
sässigt  
aber  
men-  
lich,  
ann,  
open  
tte-  
er-  
mit-  
gen  
nau  
ehr  
elle

## **Theorie der elektrischen Leitfähigkeit in Si. II**

**Bereich mittelstarker Felder („warme Elektronen“)**

*Von Wolfgang Klose*

Mit 1 Abbildung

### **Inhaltsübersicht**

Unter Berücksichtigung der Kristallsymmetrie wird für die Beweglichkeit warmer Elektronen ein allgemeiner Ausdruck angegeben. Es zeigt sich, daß die Anisotropie von Richtung und Größe des angelegten Feldes abhängt.

### **Einleitung**

Shockley<sup>1)</sup> erklärte durch eine einfache Theorie die Abweichungen vom Ohmschen Gesetz für Halbleiter in starken elektrischen Feldern. Danach nehmen die Elektronen im Mittel mehr Energie aus dem Feld auf, als sie beim nächsten Stoß mit dem Gitter an dieses abgeben können. Im stationären Fall stellt sich somit eine Elektronenverteilung mit größerer mittlerer Energie ein als es der Gittertemperatur gemäß wäre. Die Elektronen sind „heißer“ als das Gitter.

Viele Feinheiten der Experimente konnten mit dieser Theorie nicht erklärt werden, und es sind seitdem diverse Vorschläge zur Verbesserung der Theorie gemacht worden.

1. Genaue Betrachtung der Wechselwirkungen, denen die Ladungsträger unterliegen<sup>2)3)</sup>,
2. Berücksichtigung der Gittersymmetrie<sup>4)5)</sup>,
3. Verfeinerung der Transporttheorie<sup>6)7)8)</sup>.

Neuere Messungen zeigen, daß die Theorie noch nicht für alle Temperaturen eine Erklärung der experimentellen Kurven liefert<sup>9)10)11)</sup>.

<sup>1)</sup> W. Shockley, Bell Syst. Techn. J. **30**, 990 (1951).

<sup>2)</sup> J. B. Gunn, Progress in Semiconductors **2**, 213 (1957).

<sup>3)</sup> E. Conwell, J. Phys. Chem. Solids **8**, 234 (1959); E. Conwell, A. L. Brown, J. Phys. Chem. Solids **15**, 208 (1960).

<sup>4)</sup> M. Shibuya, Physic. Rev. **99**, 1189 (1955).

<sup>5)</sup> H. G. Reik, H. Risken, G. Finger, Physic. Rev. Lett. **5**, 423 (1960).

<sup>6)</sup> J. Yamashita, Physic. Rev. **111**, 1529 (1958); J. Yamashita, K. Inoue, J. Phys. Chem. Solids **12**, 1 (1959); J. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **24**, 357 (1960).

<sup>7)</sup> T. N. Morgan, J. Phys. Chem. Solids **8**, 245 (1959).

<sup>8)</sup> I. Adawi (I), Physic. Rev. **115**, 1152 (1959); (II), Physic. Rev. **120**, 118 (1960).

<sup>9)</sup> K. H. Seeger, Physic. Rev. **114**, 476 (1959).

<sup>10)</sup> A. C. Prior, J. Phys. Chem. Solids **12**, 175 (1959).

<sup>11)</sup> T. N. Morgan, C. E. Kelly, Semiconductor Conference Prague (1960).

Während die Theorie der Beweglichkeit in sehr starken Feldern die Berücksichtigung neuer, für den Ohmschen Bereich fremder, Effekte verlangt (vgl. z. B. <sup>12</sup>), kommt man bei mittelstarken Feldern ohne diese aus. Der Bereich der „warmen Elektronen“ ist definiert durch die ersten Abweichungen vom Ohmschen Gesetz, in dem die Beweglichkeit durch

$$\mu^* = \mu_0 (1 - \beta F^2)$$

beschrieben werden kann:  $\mu_0$  Nullfeldbeweglichkeit,  $F$  Betrag der Feldstärke,  $\beta F^2 \ll 1$ . Dieser experimentell leichter zugängliche Bereich bietet für die Theorie den Vorteil, daß gegenüber dem Ohmschen Bereich keine prinzipiell anderen Prozesse in Betracht zu ziehen sind, und daß der Koeffizient  $\beta$  eine sehr empfindliche Funktion der Temperatur, der Dichte der ionisierten Verunreinigungen usw. ist <sup>3) 6) 9) 11)</sup>, durch die sich die Wechselwirkungen der Elektronen mit den akustischen und optischen Phononen, Fehlstellen usw. manifestieren.

Darüber hinaus findet man auch bei warmen Elektronen, daß Strom und Feldstärke nicht mehr parallel sind. Während diese Anisotropie bei heißen Elektronen nur von der Richtung des Feldes abhängt (vgl. <sup>5</sup>) und <sup>13)</sup>), spielt bei warmen Elektronen der Betrag der Feldstärke ebenfalls eine Rolle <sup>14)</sup>.

Wegen dieser empfindlichen Abhängigkeit von den verschiedenen Größen ist eine Theorie warmer Elektronen somit geeignet, Annahmen über die Wechselwirkungen der Elektronen gut nachzuprüfen.

Die kürzlich von Adawi entwickelte Theorie warmer Elektronen <sup>8)</sup> soll in der vorliegenden Arbeit auf Si angewendet werden. Während Adawi mit kugelförmigen Energiefächern rechnet, die Viertalstruktur nicht in Betracht zieht und die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Elektronen bei Stößen mit dem Gitter der Standardtheorie (völlige Isotropie) entnimmt, wird hier gezeigt, wie man seine Theorie auf den realen Fall übertragen kann. Die Übergangswahrscheinlichkeiten übernehmen wir aus einer früheren Arbeit <sup>15)</sup>, in der das aus der Gittertheorie folgende exakte Phononpektrum ebenso berücksichtigt wurde wie die Viertalstruktur von Si.

Die Verteilungsfunktion der Elektronen wird einer Boltzmann-Gleichung entnommen. Es zeigt sich (vgl. Appendix B), daß sich von den Stoßintegralen der Elektron-Phonon-Streuung Terme mit Relaxationszeiten abseparieren lassen. Eine Berücksichtigung der Conwell-Weißkopf-Streuung kann daher einfach mit der Relaxationszeittheorie von Boiko <sup>16)</sup> erfolgen, die ebenfalls die Viertalstruktur des Halbleiters zugrunde legt. Da in der vorliegenden Arbeit keine numerischen Ergebnisse gewonnen werden, wird im folgenden die Verunreinigungsstreuung nicht erwähnt. Man hat bei numerischen Rechnungen das Boiko-Relaxationsglied einfach zu den anderen zu addieren.

<sup>12)</sup> E. G. S. Paige, Proc. Phys. Soc. **74**, 174 (1960).

<sup>13)</sup> W. Sasaki, M. Shibuya, K. Mizuguchi, G. M. Hatoyama, J. Phys. Chem. Solids **8**, 250 (1959).

<sup>14)</sup> S. H. Koenig, Proc. Phys. Soc. **73**, 959 (1959).

<sup>15)</sup> W. Klose, Ann. Physik (7) **7**, 233 (1961).

<sup>16)</sup> J. J. Boiko, Fiz. twerdogo Tela **1**, 574 (1959).

### Die Beweglichkeit

Sei  $\frac{1}{4\pi^3} f(t) d^3 t$  die Anzahl der Elektronen pro  $\text{cm}^3$  im Intervall  $t, t + d^3 t$  im Leitungsband. Die von ihnen getragene Stromdichte ist:

$$j = e \int \langle v \rangle \cdot f(t) \frac{d^3 t}{4\pi^3} = \frac{e}{4\pi^3 \hbar} \int (\text{grad } E(t)) f(t) d^3 t.$$

Bei unseren Betrachtungen wollen wir die Temperatur so klein wählen, daß nur für Zustände nahe der Bandkante die Besetzungswahrscheinlichkeit groß ist. Die Integration wird dann formal bis  $\infty$  erstreckt, indem man annimmt, daß  $f(t)$  für große Energien stark genug verschwindet.

Si hat 6 äquivalente Bandkanten, die auf den kubischen Achsen im Innern der Brillouin-Zone (in Punkten  $\Delta$ ) liegen. Alle tragen zum Strom bei, also wird:

$$j = \frac{e}{4\pi^3 \hbar} \sum_e \int_{(e)} (\text{grad } t E(t)) f(t) d^3 t$$

$t_e$  bezeichnet die Lage der Bandkanten, die einzelnen Integrale erstrecken sich über die Umgebung der jeweiligen Bandkante. Wir führen nun eine Reihe von Transformationen aus\*):

$$t = t_e + \vec{\zeta} \quad (a)$$

$$\zeta_i = \lambda_i^0 \zeta_i; \quad \lambda_i^0 = \sqrt{m_i^{0*}/m} \quad i = 1, 2, 3 \quad (b)$$

$m$ : Masse der freien Elektronen;  $m_i^{0*}$ : effektive Massen.

Wegen der symmetrischen Lage der Bandkanten sind in Si die Flächen konstanter Energie an den Leitungsbandkanten Rotationsellipsoide, deren große Achsen jeweils in den Richtungen der Koordinatenachsen liegen, die die Bandkanten tragen. Je nach betrachtetem Tal sind die  $\lambda_i^0$  einem der beiden:  $\lambda_1 = 0,99$  oder  $\lambda_2 = 0,43$  gleich.

$$\vec{\xi} = A^0 \vec{\zeta}, \quad A^0 = (\alpha_{ij}^0) = \begin{pmatrix} \cos \gamma_2^0 \cos \gamma_3^0 \cos \gamma_1^0 \\ \cos \gamma_2^0 \cos \gamma_1^0 \cos \gamma_3^0 \\ \cos \gamma_1^0 \cos \gamma_3^0 \cos \gamma_2^0 \end{pmatrix}. \quad (c)$$

Wir wählen die  $\gamma_i^0$  folgendermaßen:

Der zu berechnende Strom fließt unter dem Einfluß eines äußeren Feldes  $\mathfrak{F}$ . Wie definieren ein „wirkliches Feld“ an der Bandkante  $t_e$  durch:

$$\mathfrak{F}_e = \left\{ \frac{\mathbf{F}_i}{\lambda_i^0} \right\}; \quad |\mathfrak{F}_e| = \mathbf{F}_e \quad (1)$$

und setzen

$$\cos \gamma_i^0 = \frac{1}{\lambda_i^0 \cdot \mathbf{F}_e} \cdot \mathbf{F}_i.$$

\*) In den Transformationsformeln (a)–(c) und auch weiterhin hätte man formal die zu einer Bandkante gehörenden Größen durch den Bandkantenindex zu kennzeichnen. Sofern es sich um Transformationen unter Integralen handelt, kann man wegen der Willkürlichkeit der Bezeichnung der Integrationsvariablen bei diesen den Markierungsindex fortlassen.

Mit

$$f(\mathbf{t}) = \mathfrak{F}_e(\vec{\xi})$$

$$E(\mathbf{t}) = \varepsilon(\xi) = \frac{\hbar^2 \xi^2}{2m}$$

$$d^3 \mathbf{t} = \lambda_1 \lambda_2^2 d^3 \vec{\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial k_i} = \frac{1}{\lambda_i^2} \sum_j \alpha_{ij}^e \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

wird aus der Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{\hbar e \lambda_1 \lambda_2^2}{4m \pi^2} \sum_{q=1}^6 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\alpha_{ij}^e}{\lambda_i^2} \int_{(q)} \xi_j \mathfrak{F}_e(\vec{\xi}) d^3 \vec{\xi}$$

Angenommen nun, man kann darstellen:

$$\mathfrak{F}_e(\vec{\xi}) = f_0^e(x) + \cos \alpha \cdot f_1^e(x),$$

wobei  $x = \frac{\varepsilon(\xi)}{kT}$  und  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\vec{\xi}$  und der z-Achse im  $\vec{\xi}$ -System an der Bandkante  $\mathbf{k}_0$  ist.

Damit ist

$$\int_{(q)} \xi_j \mathfrak{F}_e(\vec{\xi}) d^3 \vec{\xi} = \int_{(q)} \xi_j f_0^e(x) d^3 \vec{\xi} + \int_{(q)} \xi_j f_1^e(x) \cos \alpha d^3 \vec{\xi}.$$

Das erste Integral verschwindet aus Symmetriegründen, das zweite ebenfalls, für  $j \neq 3$ . Also

$$\int_{(q)} \xi_3 \mathfrak{F}_e(\vec{\xi}) d^3 \vec{\xi} = \delta_{j3} \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(2m k T)^2}{2\hbar^4} \int_0^\infty f_1^e(x) x dx.$$

Man kann am Integral die Kennzeichnung des Integrationsgebiets fortlassen, da alle Täler durch die Transformation gleichartig gemacht sind. Nun ist

$$\sum_{i,j} \frac{1}{\lambda_i^2} \alpha_{ij}^e \delta_{j3} e_i = \frac{1}{F_e} \sum_i \frac{F_i}{(\lambda_i^e)^2} e_i$$

Also erhält man für die Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{e \lambda_1 \lambda_2^2}{6m \pi^2} \frac{(2m k T)^2}{\hbar^3} \sum_e \frac{1}{F_e} \left( \sum_i \frac{F_i}{(\lambda_i^e)^2} e_i \right) \int_0^\infty f_1^e(x) x dx.$$

Die Gesamtzahl der Elektronen wird ausgedrückt durch

$$n = \int f(k) \frac{d^3 k}{4\pi^3}$$

was nach den Transformationen die Form

$$n = \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\pi^2} \frac{\sqrt{2m k T^3}}{2\hbar^3} \sum_e \int_{(q)} f_0^e(x) \sqrt{x} dx \quad (4)$$

erhält.

Unser Leitfähigkeitstensor  $\sigma$  ist automatisch diagonal. Mit

$$\vec{j} = \sigma \vec{\mathfrak{F}}$$

hat man offenbar

$$\sigma_i = \frac{e \lambda_1 \lambda_2^2}{6m \pi^2} \frac{(2m k T)^2}{\hbar^3} \sum_e \frac{1}{F_e} \frac{1}{(\lambda_i^e)^2} \int_0^\infty f_1^e(x) x dx \quad (5)$$

und mit  $\sigma_i = e \pi \mu_i$  ist der Beweglichkeitstensor

$$\mu_i = \frac{\sqrt{2} m k T}{3 \pi} \frac{\sum_e \frac{1}{F_e} \frac{1}{(\lambda_e^0)^2} \int_0^\infty f_e^0(x) x dx}{\sum_e \int_0^\infty f_e^0(x) \sqrt{x} dx}. \quad (6)$$

### Die Relaxationszeitapproximation

Si hat 6 Leitungsbandkanten an Punkten  $\Delta$  in der Brillouin-Zone. Der Abstand zweier Bandkanten voneinander ist größenordnungsmäßig  $\frac{1}{4} \mathfrak{K}$  bis  $\frac{1}{2} \mathfrak{K}$ , wo  $\mathfrak{K}$  der kleinste reziproke Gittervektor ist. Nach Voraussetzung ist die Temperatur sehr klein. Also haben die Phononen im Mittel nur so kleine Impulse  $\hbar \mathfrak{w}$ , daß die Impulssätze für Zwischenthalstreuung [vgl. (A 1)] weder für Normal- noch für Umklapp-Prozesse erfüllbar sind.

Die Vernachlässigung der Zwischenthalstreuung bedeutet, daß die Boltzmann-Gleichung in 6 Transport-Gleichungen für die Einzeltäler zerfällt. Für jedes Tal gilt

$$-\frac{e}{\hbar} \mathfrak{F} \operatorname{grad}_t f(t) = \frac{N \Delta}{8 \pi^3} \int \{ P(t, t') f(t') - P(t', t) f(t) \} d^3 t'$$

mit den in (A 2) und (A 4) angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten  $P(t', t)$ .

Durch die Transformationen (a), (b), (c) wird an jeder Bandkante

$$\mathfrak{F} \operatorname{grad}_t f(t) = F_e \frac{\partial \mathfrak{F}(\vec{\xi})}{\partial \xi_3}.$$

Somit lautet die Boltzmann-Gleichung

$$-\frac{e}{\hbar} F_e \frac{\partial \mathfrak{F}_e(\vec{\xi})}{\partial \xi_3} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N \Delta}{8 \pi^3} \int \{ P_e(\vec{\xi}, \vec{\xi}') \mathfrak{F}_e(\vec{\xi}') - P_e(\vec{\xi}', \vec{\xi}) \mathfrak{F}_e(\vec{\xi}) \} d^3 \vec{\xi}' \quad (7)$$

mit den transformierten Übergangswahrscheinlichkeiten (B 1) und (B 4).

Die in Appendix A angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten  $P(t', t)$  sind gemäß Appendix B dieser Arbeit so gemittelt, daß sie nur vom Winkel  $\theta$  zwischen  $\vec{\xi}$  und  $\vec{\xi}'$  abhängen.

Dann können im  $\vec{\xi}$ -Raum die Boltzmann-Gleichungen (7) mit der von Adawi entwickelten Methode (8) gelöst werden. Um Platz zu sparen verwenden wir die Bezeichnungsweise Adawis ohne nochmalige Erklärung und zitieren direkt seine Definitionsgleichungen.

Mit dem Ansatz

$$\mathfrak{F}_e(\vec{\xi}) = C M(x) \cdot \sum_{e=0}^{\infty} \Phi_e^0(x) P_e(\cos \alpha), \quad M(x) = e^{-x} \quad (8)$$

zerfällt die Boltzmann-Gleichung in einen Satz von Gleichungen für  $l = 0, 1, 2, \dots$

Mit den bei (Adawi I, 5) definierten Operatoren

$$\begin{aligned} A_l \Phi &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 N \Delta}{8 \pi^3} \int P(\vec{\xi}, \vec{\xi}) M(x) \{ \Phi(x) - P_l(\cos \theta) \Phi(x') \} d^3 \vec{\xi} \\ S_{l, l-1} \Phi &= \frac{e}{\hbar} \frac{l \xi^{l-1}}{2l-1} \cdot \frac{d}{d\xi} (\xi^{1-l} M(x) \Phi) \\ S_{l, l+1} &= \frac{e}{\hbar} \frac{l+1}{2l+3} \frac{1}{\xi^{l+2}} \frac{d}{d\xi} (\xi^{l+2} M(x) \Phi) \end{aligned} \quad (9)$$

lauten diese Gleichungen:

$$F_e \{ S_{l, l-1} \cdot \Phi_{l-1}^e + S_{l, l+1} \Phi_{l+1}^e \} = \lambda_e \Phi_e^e. \quad (10)$$

Setzen wir

$$\Phi_e^e(x) = F_e^l \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{l, l+n} F_e^{2n} \quad (11)$$

hierin ein, so erhalten wir für die Koeffizienten  $a_{l, l+n}$  das Gleichungssystem (Adawi I, 9)

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda_0 a_{00} \\ S_{10} a_{00} &= \Lambda_1 a_{11} \\ S_{01} a_{11} &= \Lambda_0 a_{01} \\ S_{21} a_{11} &= \Lambda_2 a_{22} \\ S_{10} a_{01} + S_{12} a_{22} &= \Lambda_1 a_{12} \\ S_{01} a_{12} &= \Lambda_0 a_{02} \text{ usw.} \end{aligned} \quad (12)$$

Zur Berechnung der Beweglichkeit in nächsthöherer als der Ohmschen Näherung muß man die Koeffizienten  $a_{11}$  und  $a_{12}$  kennen, wenn man  $f_1^e(x) = CM \Phi_1^e$  direkt in (6) einsetzen will. Wie aus dem Gleichungssystem (12) ersichtlich, muß man dafür alle angegebenen Gleichungen lösen, d. h. die Größe

$$\Phi_0^e = a_{00} + a_{01} F_e^2 + a_{02} F_e^4$$

berechnen. In der Entwicklung nach Kugelfunktionen geht man also bis zu  $l = 2^*$ ). Wegen der Kompliziertheit der Integraloperatoren  $\Lambda_l$  ist die exakte Auswertung aller dazu nötigen Gleichungen zu mühsam, um wegen der in den Übergangswahrscheinlichkeiten gemachten Näherungen lohnend zu sein. Daher soll wie üblich der Stoßterm  $\Lambda_1$  durch eine Relaxationszeit approximiert werden. Dann kann  $\Phi_1^e$  der Gleichung (10) für  $l = 1$  sofort entnommen werden:

$$F_e \{ S_{10} \Phi_0^e + S_{12} \Phi_2^e \} \cdot \tau = M(x) \Phi_1^e(x). \quad (13)$$

In (6) eingesetzt erhält man die Beweglichkeit proportional zu Termen  $\Phi_0$  und  $\Phi_2$ .

Andererseits kann man damit auch in die Gleichung (10) für  $l = 0$  eingehen:

$$\begin{aligned} F_e S_{01} \Phi_1^e &= \Lambda_0 \Phi_0^e \\ F_e^2 S_{01} [(S_{10} \Phi_0^e + S_{12} \Phi_2^e) M(-x) \tau(x)] &= \Lambda_0 \Phi_0^e, \end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, daß zur korrekten Berechnung von  $\Phi_0^e$  bis zu quadratischen Termen im Feld auf der linken Seite  $\Phi_2^e$  vernachlässigt werden darf. Die Verwendung der „Diffusionsapproximation“, d. h. Vernachlässigung aller

\* Morgan<sup>7)</sup> entwickelt (ebenso wie Yamashita<sup>6)</sup>) nur bis zu Termen  $l = 1$  und erhält deshalb, wie man hieraus ersieht, keine korrekte Aussage über  $a_{12}$ , d. h. seine bis zu Termen  $F^2$  berechnete Beweglichkeit ist unvollständig.

Terme mit  $l \geq 2$  gestattet also eine korrekte Bestimmung von  $\Phi_0$  bis zu quadratischen Termen im Feld. Morgan, Yamashita und Adawi berechnen für  $\Phi_0$  somit den richtigen Ausdruck.

(9) Die Berechnung der Beweglichkeit mit dem so erhaltenen  $\Phi_0$  allein stellt jedoch wegen Vernachlässigung der  $\Phi_2$ -Terme in (13) nur eine Näherung dar. Die Güte dieser Näherung wird in Appendix C untersucht.

Für die weiteren Rechnungen übernehmen wir die Stoßterme  $A_0, A_1$  aus Appendix B und nähern  $A_1$  durch eine Relaxationszeit an. Damit lässt sich das System (12) der Koeffizienten  $a_{l, l+n}$  in richtiger Näherung lösen.

Setzt man

$$\frac{1}{C} f_1^e(x) = M(x) \Phi_1^e(x) = F_e \tau(x) \{S_{10} \Phi_0^e\} \quad (C \text{ ist Normierungskonstante})$$

in den Ausdruck für die Beweglichkeit ein, ist:

$$\mu_e = \frac{2e}{3m} \frac{\sum_e \frac{1}{(\lambda_e^0)^2} \int_0^\infty \tau(x) x^{3/2} \frac{d}{dx} (e^{-x} \Phi_0^e) dx}{\sum_e \int_0^\infty e^{-x} \Phi_0^e(x) \sqrt{x} dx}. \quad (14)$$

Indem wir mit Adawi  $a_{00} = 1$  setzen und  $\int_0^\infty e^{-x} a_{0n} \sqrt{x} dx = 0$  verlangen (das bedeutet also:  $\int f_0(x) \sqrt{x} dx = C \int e^{-x} \sqrt{x} dx \sim n$ , vgl. Adawi I<sup>8</sup>), gelingt die eindeutige Lösung des Systems (12). Mit

$$\int_0^\infty e^{-x} \Phi_0^e(x) \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

ist

$$\mu_e = \frac{1}{6} \sum_e \frac{1}{(\lambda_e^0)^2} \mu^e. \quad (15)$$

Hier haben wir mit  $\mu^e$  den Beweglichkeitsausdruck des Tals  $f_e$  bezeichnet, der mit dem Feld  $F$  zu bilden ist:

$$\mu^e = -\frac{4e}{3m \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \tau(x) x^{3/2} e^{-x} \left( \Phi_0^e - \frac{d\Phi_0^e}{dx} \right) dx \quad (16)$$

(vgl. Adawi I, 17) ( $\Phi_0^e$  hängt nur über  $F_e$  noch von  $\varrho$  ab).

Die Beweglichkeit wird mit der Funktion  $\Phi_0^e$  berechnet. Diese entnehmen wir der Gleichung (12c),

$$S_{01} a_{11} = S_{01} (\tau M(-x) S_{10}) = A_0 a_{01},$$

die mit dem Kohlerschen Variationsprinzip gelöst wird. Wir schreiben (12c) noch in passender Weise um. Es ist:

$$S_{01} (\tau M(-x) S_{10}) = -\frac{2e^2}{3mkT} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} (\tau x^{3/2} e^{-x}).$$

Setzen wir

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{\text{akust}}} + \frac{1}{\tau_{\text{opt}}} + \frac{1}{\tau_{\text{Rest}}} = \frac{1}{\tau_{\text{akust}}} \left( 1 + \frac{\tau_{\text{akust}}}{\tau_{\text{opt}}} + \frac{\tau_{\text{akust}}}{\tau_{\text{Rest}}} \right) \\ = W L_2 \sqrt{x} (1 + h(x)) \quad (17a)$$

mit den in (B 7, 9) definierten Konstanten  $W$  und  $L_2$  und weiter:

$$\frac{3m k T WL_2}{2e^2} A_0 = \bar{A}_0 \quad (17b)$$

dann lautet die zu lösende Gleichung:

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \left( \frac{x e^{-x}}{1 + h(x)} \right) = \bar{A}_0 a_{01}. \quad (18)$$

Die Koeffizienten  $c_r$  des Variationsansatzes

$$a_{01} = \sum_{r=1}^N c_r u_r; \quad u_r = x^r - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2r+1}{2} \quad (19)$$

(hier ist  $\langle a_{01} \rangle = 0$  automatisch erfüllt) entnimmt man den Gleichungen [vgl. Adawi (I, 20 und (II, 15):

$$\begin{aligned} b_r &= \sum_{r=1}^N c_s d_{rs} \\ d_{rs} &= d_{sr} = \int_0^\infty u_r' \bar{A}_0 u_s \sqrt{x} dx \\ b_r &= \int_0^\infty \frac{e^{-x} x}{1 + h(x)} u_r'(x) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Setzt man (19) in (16) ein, findet man:

$$\mu_i = -\frac{4e}{3m\sqrt{\pi}WL_2} \left\{ S_i b_1 + T_i \sum_{r=1}^N c_r \left[ \frac{b_{r+1}}{r+1} - b_r - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2r+1}{2} b_1 \right] \right\},$$

wobei

$$S = S_i = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{2}{\lambda_2^2} \right); \quad T_i = \frac{1}{6} \sum_{q=1}^6 \frac{F_q^2}{(\lambda_q^2)^2}.$$

Der isotrope Teil des Beweglichkeitstensors entspricht dem üblichen Ohmschen Anteil an der Beweglichkeit:

$$\mu_0 = -\frac{4e S b_1}{3m\sqrt{\pi}WL_2}. \quad (21)$$

Auch bei alleiniger Betrachtung der Wechselwirkung mit akustischen Phononen ( $b_1 = 1$ ) ist  $\mu_0$  von der Standardgröße  $\mu_a$  durch die Symmetriefaktoren  $S$ ,  $L_2$ ,  $W$  verschieden.

Der anisotrope Teil der Beweglichkeit wird durch die Größe  $T_i$  beschrieben:

$$T_i = \frac{1}{6} \sum_{q=1}^6 \sum_{j=1}^3 \frac{F_j^2}{(\lambda_q^2 \lambda_j^2)^2} = F^2 \cdot \vartheta_i. \quad (22)$$

Wir können also schreiben

$$\mu_i = \mu_0 (1 - \beta F^2 \vartheta_i), \quad (23)$$

wobei

$$\beta = -S^{-1} \sum_{r=1}^N \frac{c_r}{b_1} \left[ \frac{b_{r+1}}{r+1} - b_r - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2r+1}{2} b_1 \right].$$

Orthonormiert man die Versuchsfunktionen  $u_r$  in (19):

$$(17b) \quad p_1 = u_1 / \sqrt{d_{11}} \quad (25)$$

$$p_n = \left\{ u_n - \sum_{r=1}^{n-1} p_r \int_0^\infty u_n \bar{A}_0 p_r \sqrt{x} dx \right\} \left\{ d_{nn} - \sum_{r=1}^{n-1} \left( \int_0^\infty u_n \bar{A}_0 p_r \sqrt{x} dx \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

(18) (vgl. Adawi II, 25) und variiert nach den Polynomen  $p_r$ :

$$a_{01} = \sum_{r=1}^N \alpha_r p_r,$$

(19) dann ist  $\beta$  einfacher darstellbar, nämlich

$$\beta = -S^{-1} \sum_{r=1}^N \frac{\alpha_r}{b_1} \left\{ -\alpha_r + \int_0^\infty \frac{e^{-x} x p_r}{1 + h(x)} dx \right\} \quad (24a)$$

mit

$$(20) \quad \alpha_r = \int_0^\infty \frac{e^{-x} x p_r}{1 + h(x)} dx.$$

### Anisotropie warmer Elektronen

In Anlehnung an Shibuya<sup>4)</sup> untersuchen wir die Anisotropie der warmen Elektronen für bestimmte Feld- und Stromrichtungen im Kristall.

Fall A. Das Feld liegt in der  $y = z$ -Ebene:  $\mathfrak{F}_A = \{F_1, F_2, F_2\}$ ,

Fall B. Das Feld liegt in der  $z = 0$ -Ebene:  $\mathfrak{F}_B = \{F_1, F_2, 0\}$ .

Wie man sich leicht überzeugt, liegen die Stromvektoren jeweils in der gleichen Ebene wie der Feldvektor. Wir können daher Feld- und Stromvektor charakterisieren durch ihre Länge und den Winkel, den sie mit der  $x$ -Achse einschließen:

$$\mathfrak{F}_A = \left\{ F \cos \Psi, \frac{1}{\sqrt{2}} F \sin \Psi, \frac{1}{\sqrt{2}} F \sin \Psi \right\};$$

$$\mathfrak{F}_B = \{F \cos \Psi, F \sin \Psi, 0\}$$

$$j_A = \left\{ j \cos \delta, \frac{1}{\sqrt{2}} j \sin \delta, \frac{1}{\sqrt{2}} j \sin \delta \right\}; \quad j_B = \{j \cos \delta, j \sin \delta, 0\}$$

(die Indizes beziehen sich auf die Fälle A, B.).

Offenbar ist jedesmal

$$(21) \quad \text{tg } \delta = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{tg } \Psi = \frac{\mu_2}{\mu_1} \text{tg } \Psi. \quad (26)$$

Da  $\mu_1$  und  $\mu_2$  nur quadratisch von den Feldstärkekomponenten abhängen, ist  $(\mu_2/\mu_1)$  gegen Ersetzung von  $\Psi$  durch  $-\Psi$  invariant, d. h. um die Koordinatenachsen ist die Funktion  $\delta = \delta(\Psi)$  streng antisymmetrisch. Die Anisotropie der warmen Elektronen drückt sich in der Funktion  $\delta = \delta(\Psi)$  explizit aus.

Sei das äußere Feld verschwindend klein (Ohmsche Näherung). Aus (23) entnimmt man dann für Fall A und B:  $\mu_2 = \mu_1$ , also  $\delta = \Psi$ , d. h. Strom- und Feldvektor haben stets gleiche Richtung.

Obwohl unsere Rechnungen nur für den Bereich warmer Elektronen, d. h. kleiner Felder gültig sind, wollen wir als Grenzfall  $F$  sehr groß betrachten. Dann ist

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\theta_1}{\theta_2} \operatorname{tg} \Psi, \quad (27)$$

wobei der Quotient  $(\theta_2/\theta_1)$  nur noch von der Richtung des Feldes, aber nicht mehr von dessen Betrag abhängt. Die Anisotropie liegt somit unabhängig von

der Feldstärke fest (in Übereinstimmung mit den Aussagen von Shibuya<sup>4)</sup> und Messungen von Sasaki und anderen<sup>13)</sup>).

Im mittleren Bereich der warmen Elektronen ist die Anisotropie auch abhängig von dem Betrag der Feldstärke. Quantitativ kann man ohne die Kenntnis der exakten

Abb. 1. Anisotropie warmer Elektronen

Verteilungsfunktion der Elektronen nur die durch die Symmetrie notwendig festgelegten Winkel angeben, für die  $j \parallel \vec{\xi}$  ist. Qualitativ kennt man dann den Verlauf der Abweichung von der Parallelität. Experimentell von Interesse ist die Funktion  $(\Psi - \delta)$  in Abhängigkeit von  $\delta$ . Wir haben sie in Abb. 1 für die Fälle A (ausgezogen) und B (gestrichelt) wiedergegeben.

Die aufgetragenen Kurven sind Gl. (27) entnommen, gelten für die warmen Elektronen also nur bedingt.

### Zusammenfassung

Der Übergang zu größeren Feldern lässt sich an den Transportkoeffizienten der Elektronen durch Abweichungen vom Ohmschen Verhalten erkennen. Schon der unmittelbar an den Ohmschen anschließende Bereich der warmen Elektronen bietet eine dem Vergleich zwischen Messungen und Theorie sehr wertvolle neue Größe: den Koeffizienten des quadratischen Feldstärketerms in der Beweglichkeit. Es ist bekannt, daß die Temperaturabhängigkeit dieses Faktors empfindlich von der Wahl der Wechselwirkungsprozesse der Elektronen bei seiner Berechnung abhängt: die Ankopplung optischer Gitterschwingungen oder die Conwell-Weißkopf-Streuung ändert die Abhängigkeit von  $T$  erheblich (vgl. <sup>2)</sup>).

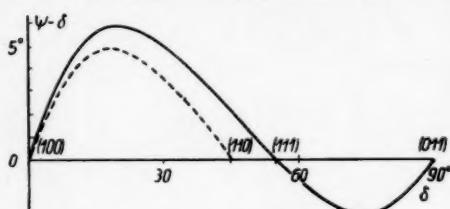
Die in der vorliegenden Arbeit gegebene Berechnung von  $\beta$  zeigt außer der Abhängigkeit von der Natur der Stoßprozesse auch ein vom Betrag und Richtung des äußeren Feldes abhängiges Anisotropieverhalten.

Die wichtigsten physikalischen Annahmen, die dieses Ergebnis zulassen, sind dabei:

1. Die Entkopplung der einzelnen Täler (Vernachlässigung von Zwischenstreuung),

2. Reduzierung der Anisotropie.

Die den Transformationen (a)–(c) unterworfenen Übergangswahrscheinlichkeiten wurden nur vom Winkel zwischen dem  $\vec{\xi}$ -Vektor des Elektrons vor und nach dem Stoß mit einem akustischen Phonon abhängig angenommen. Das



bedeutet, daß sie nicht mehr von der speziellen Bandkante  $\mathbf{k}_0$  abhängen. In der Boltzmann-Gleichung (7) ist dann  $\mathbf{F}_e$  die einzige noch von der speziellen Bandkante abhängige Größe, d. h. die ganze Anisotropie röhrt vom Driftterm her. Anders als in einer ähnlichen Approximation von Yamashita<sup>15b)</sup> wurde diese Reduktion der Anisotropie jedoch im  $\xi$ -Raum vorgenommen und nicht im eigentlichen  $k$ -Raum der Elektronen.

## Appendix A

### Die Übergangswahrscheinlichkeiten

In einer früheren Arbeit<sup>15)</sup> (im folgenden mit I zitiert) wurden die Matrixelemente für die Streuung von Elektronen an Phononen in Germanium und Silizium abgeleitet. Man benutzt diese nun zur Ableitung der quantenmechanischen Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$P(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E' - E) |\langle \mathbf{k}', \Pi \varphi' | H | \mathbf{k}, \Pi \varphi \rangle|^2.$$

Die Matrixelemente entnimmt man den Gleichungen (I, 6) sowie (I, 15–16). Sie entsprechen den Übergängen von  $\mathbf{k}$  nahe einer Bandkante  $\mathbf{k}_0$  nach  $\mathbf{k}'$  bei der Bandkante  $\mathbf{k}_0$ . Mit

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \vec{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}_0 + \vec{\mathbf{z}'}$$

ist

$$P_{\vec{\mathbf{z}}' \vec{\mathbf{z}}}^{\mu | P | w} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{\hbar \bar{n}_{\mu p}(w)}{NM \omega_{\mu p}(w)} |M_{\mu p}^{\sigma \sigma}(\vec{\mathbf{z}'}, \vec{\mathbf{z}})|^2 \delta_{\mathbf{k} \pm w, \mathbf{k}' - \mathbf{k}} \cdot \delta [E_{\sigma}(\vec{\mathbf{z}'}) - E_{\sigma}(\vec{\mathbf{z}}) \pm \hbar \omega_{\mu p}] \quad (A 1)$$

mit  $E_{\sigma}(\vec{\mathbf{z}}) = E(\mathbf{k}_0 + \vec{\mathbf{z}})$ ;  $w$  ist der Wellenvektor des Phonons. Wir schreiben in den Übergangswahrscheinlichkeiten explizit  $w$  statt  $\mathbf{k}'$ , um zwischen Phononenemissions- und Absorptionsprozessen unterscheiden zu können.

$\mu = 1$  für akustische Phononen:

$u_2 = u_3$ : transversale Schallgeschwindigkeit,

$\mu = 2$  für optische Phononen:  $\omega_{2p} = \omega = \text{const.}$

$n_{\mu p}(w) = [e^{\hbar \omega_{\mu p}(w)/k T} - 1]^{-1}$ ,

N: Gesamtzahl der Zellen im Grundgebiet,

M: Masse der Elementarzelle.

Wir finden nun:

#### Innertalstreuung, $\mathbf{k} = 0$

##### a) Akustische Phononen

$$P_{\vec{\mathbf{z}} - w \vec{\mathbf{z}}}^{n_p + 1 \ n_p} = \frac{2\pi(n_p + 1)}{NM u_p |w|} \cdot |w C(\varrho) e_p + |w| \bar{D}(\varrho) \left( \vec{Q}_p \cdot \frac{\mathbf{k}_0}{|\mathbf{k}_0|} \right)|^2 \cdot \delta [E_{\sigma}(\vec{\mathbf{z}} - \vec{w}) - E_{\sigma}(\vec{\mathbf{z}}) + \hbar u_p w'] \quad (A 2)$$

$$P_{\vec{\mathbf{z}} + w \vec{\mathbf{z}}}^{n_p \ n_p + 1} = \frac{2\pi n_p}{NM u_p |w|} \cdot |w C(\varrho) u_p + |w| \bar{D}(\varrho) \left( \vec{Q}_p \cdot \frac{\mathbf{k}_0}{|\mathbf{k}_0|} \right)|^2 \cdot \delta [E_{\sigma}(\vec{\mathbf{z}} + \vec{w}) - E_{\sigma}(\vec{\mathbf{z}}) - \hbar u_p |w|].$$

## b) Optische Phononen

Diese Übergangswahrscheinlichkeiten kann man sofort weiter ausrechnen. Mit

$$e_p \frac{\mathbf{t}_p}{|\mathbf{t}_p|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha_p$$

ist

$$M_{2p}^{pp} (\vec{\mathbf{z}}', \vec{\mathbf{z}}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} D(\varrho) \cos \alpha_p.$$

An anderer Stelle in der Übergangswahrscheinlichkeit kommt  $p$  nicht vor, weshalb man die Summe über die 3 Polarisationsrichtungen ausführen kann. Da  $\mathbf{t}_p$  festliegt und  $e_p$  ein orthonormales 3-Bein ist, gilt:

$$\sum_p \cos^2 \alpha_p = 1.$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} P_{\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{w}} \vec{\mathbf{k}}}^{n+1 n} &= \frac{2 \pi (n+1)}{NM\omega} \frac{|D(\varrho)|^2}{2} \delta [E_p(\vec{\mathbf{z}} - \vec{\mathbf{w}}) - E_p(\vec{\mathbf{z}}) + \hbar\omega] \\ P_{\vec{\mathbf{k}} + \vec{\mathbf{w}} \vec{\mathbf{k}}}^{n n+1} &= \frac{2 \pi n}{NM\omega} \frac{|D(\varrho)|^2}{2} \delta [E_p(\vec{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{w}}) - E_p(\vec{\mathbf{z}}) - \hbar\omega]. \end{aligned} \quad (A 4)$$

Völlig analog kann man die Übergangswahrscheinlichkeit für die Zwischenthalstreuung angeben.

## Appendix B

## Transformation der Übergangswahrscheinlichkeiten und Berechnung des Stoßterms

Die in (A 2) und (A 4) angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten für Elektronen bei Stößen mit optischen und akustischen Phononen werden den Transformationen (a) bis (c) unterworfen.

Da in der Übergangswahrscheinlichkeit (A 4)  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{w}$  nur in der Energie auftreten, ist die Transformation trivial ausführbar. Es ist:

$$\left. \begin{aligned} P_{\vec{\xi} - \vec{\eta} \vec{\xi}}^{n+1 n} &= \frac{2 \pi (n+1)}{NM\omega} \frac{|D(\varrho)|^2}{2} \delta [\varepsilon(\vec{\xi} - \vec{\eta}) - \varepsilon(\vec{\xi}) + \hbar\omega] \\ P_{\vec{\xi} + \vec{\eta} \vec{\xi}}^{n n+1} &= \frac{2 \pi n}{NM\omega} \frac{|D(\varrho)|^2}{2} \delta [\varepsilon(\vec{\xi} + \vec{\eta}) - \varepsilon(\vec{\xi}) - \hbar\omega] \end{aligned} \right\} = P(\vec{\xi}', \vec{\xi}) \quad (B 1)$$

für die Wechselwirkung mit optischen Phononen. Auch hier behalten wir zur Unterscheidung von Phononemissions- und Absorptionsprozessen die Schreibweise  $\vec{\xi} \pm \vec{\eta} = \vec{\xi}'$  explizit bei. Nicht ohne zusätzliche Approximationen formt man die in (A 2) angegebenen Ausdrücke um. Wir betrachten zunächst den Ausdruck:

$$\frac{1}{|\mathbf{w}|} \mathbf{w} C(\varrho) e_p + |\mathbf{w}| \bar{D}(\varrho) \left( \vec{\Omega}_p \frac{\mathbf{t}_p}{|\mathbf{t}_p|} \right)^2. \quad (B 2)$$

Bevor wir die Transformation (c) vornehmen, berechnen wir den gemäß (a) und (b) transformierten Ausdruck (B 2) für einen festen Anfangszustand des Elektrons: der transformierte Wellenvektor möge parallel zu  $\vec{\zeta}$  sein. Mit  $\vec{\zeta}$  als Polarachse hängt (B 2) von den Winkeln  $(\vartheta, \varphi)$  ab  $\{ \mathbf{w} \rightarrow \vec{\eta}(\eta, \vartheta, \varphi) \}$ .

Diesen speziellen Ausdruck vereinfachen wir durch Mittelung über den Azimuthwinkel  $\varphi$  und verwenden das Ergebnis fortan als Faktor in der Übergangswahrscheinlichkeit an Stelle des korrekten Ausdrucks (B 2) für alle Werte von  $\vec{\xi}$ . Das ist möglich, weil unser gemittelter spezieller Wert (B 2) nur noch vom Winkel zwischen  $\vec{\zeta}$  und  $\vec{\eta}$  abhängt.

Mit den Polarisationsvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2} |\mathbf{w}|} \{ \mathbf{w}_{\parallel}, \mathbf{w}_{\perp_1}, \mathbf{w}_{\perp_2} \} \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2} |\mathbf{w}_{\perp_1}| \cdot |\mathbf{w}_{\perp_2}|} \{ 0, \mathbf{w}_{\perp_1}, -\mathbf{w}_{\perp_2} \} \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2} |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{w}_{\perp}|} \{ -\mathbf{w}_{\perp}^2, \mathbf{w}_{\parallel} \mathbf{w}_{\perp_1}, \mathbf{w}_{\parallel} \mathbf{w}_{\perp_2} \},\end{aligned}\quad (\text{B } 3)$$

die auf das Koordinatensystem parallel und senkrecht  $\mathbf{k}_e$  bezogen sind, liefern die angegebenen Rechnungen:

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{2 \lambda^3} \left\{ \lambda_2^2 C_2(\varrho) + (\lambda_1^2 C_1(\varrho) - \lambda_2^2 C_2(\varrho)) \cos^2 \vartheta \right\}^2 + \frac{|\bar{D}(\varrho)|^2}{4} \lambda_2^4 (1 - \cos^2 \vartheta)^2 \cdot \delta_{1p} \\ \frac{\eta}{2 \lambda} \left\{ \frac{|\bar{D}(\varrho)|^2}{4} \lambda_2^2 (1 - \cos^2 \vartheta) \right\} \cdot \delta_{2p} \\ \frac{\eta}{2 \lambda^3} \left\{ |C_2(\varrho) - C_1(\varrho)|^2 + \frac{|\bar{D}(\varrho)|^2}{4} \right\} \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cos^2 \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \cdot \delta_{3p}\end{aligned}\quad (\text{B } 4)$$

wo

$$\lambda^2 = \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \cos^2 \vartheta; \mathbf{w} \rightarrow \vec{\eta}, \text{ und } \eta = |\vec{\eta}|.$$

Durch die Mittelung sind die in (B 2) noch vorhandenen gemischten Terme  $C_i(\varrho) \cdot \bar{D}(\varrho)$  herausgefallen. Nach Ehrenreich und Overhauser<sup>17)</sup> bedeutet diese Näherung, daß die optischen und akustischen Gitterschwingungen statistisch unabhängige Streuphänomene liefern.

Die Ausdrücke (B 4) werden für die weitere Rechnung benutzt. Die orthogonale Transformation (c) ändert nichts am Betrag  $\eta$ , die Größen  $C_1(\varrho)$  und  $C_2(\varrho)$ ,  $\bar{D}(\varrho)$  sind fest berechnete Konstanten und  $\vartheta$  interpretieren wir auch im gedrehten Koordinatensystem als Winkel zwischen Phonon- und Elektronenwellenvektor.

Eine weitere Näherung führen wir in den Ausdrücken für die Frequenz der akustischen Phononen aus. Wir approximieren

$$\begin{aligned}\omega_{1p} &= u_p |\mathbf{w}| = u_p \cdot \eta \sqrt{\lambda_1 (\eta_{\parallel}/\eta)^2 + \lambda_2^2 (\eta_{\perp}/\eta)^2} \\ &= u_p \eta \lambda_1 \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_1^2} (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (\eta_{\perp}/\eta)^2}.\end{aligned}$$

Also

$$\omega_{1p} \approx \alpha u_p \eta \lambda_1 = c_p \eta. \quad (\text{B } 5)$$

Setzt man die Werte für  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ein, so schätzt man leicht ab:  $0,43 \leq \alpha \leq 1$ .

Die Stoßterme  $A_i$  können nun mit (B 1) und (B 4) ausgerechnet werden. Die Rechnungen für die optischen Phononen verlaufen dabei ebenso wie in

<sup>17)</sup> H. Ehrenreich, A. W. Overhauser, Physic. Rev. **104**, 331 (1956).

der Standardtheorie mit kugelförmigen Energiefächern, da die Übergangswahrscheinlichkeit außer in der Energie nicht mehr von den Elektronen und Phononen abhängt. Es ergibt sich also wie bei Yamashita, Morgan oder Ada w i<sup>6)</sup>)<sup>7)</sup>:

$$\begin{aligned} A_0^{\text{opt}} &= -WB e^{-x} \{ \sqrt{x+x_0} (\Phi(x+x_0) - \Phi(x)) + u(x-x_0) \\ &\quad \cdot \sqrt{x-x_0} e^{x_0} (\Phi(x-x_0) - \Phi(x)) \} \quad (B 6) \\ A_1^{\text{opt}} &= \frac{e^{-x} \Phi}{\tau_{\text{opt}}} \cdot \frac{1}{\tau_{\text{opt}}} = WB (\sqrt{x+x_0} + u(x-x_0) \sqrt{x-x_0} e^{x_0}). \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten

$$\begin{aligned} W &= \lambda_1 \lambda_2^2 \frac{1}{l_0} \sqrt{\frac{2 k T}{m}}; \quad x_0 = \hbar \omega / k T; \quad B = \frac{b x_0}{2(e^{x_0} - 1)}; \\ l_0 &= \frac{\pi M u_1^2 \hbar^4}{4 |C_1|^2 m^2 k T}; \quad b = \frac{|D(\varrho)|^2 u_1^2}{|C_1|^2 \omega^2}; \quad x = \frac{\varepsilon(\xi)}{k T}; \\ u(x-x_0) &= \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x > x_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (B 7)$$

Die akustischen Stoßterme werden mit der üblichen Annahme der Phononen-Gleichverteilung ausgerechnet. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} A_0^{\text{akust}} \Phi &= -W \alpha x_1 L_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{d}{dx} (e^{-x} x^2 \Phi') \quad (B 8) \\ A_1^{\text{akust}} \Phi &= \frac{e^{-x} \Phi}{\tau_{\text{akust}}} + \text{Funktional}(\Phi) \\ \frac{1}{\tau_{\text{akust}}} &= WL_2 \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Das bei  $A_1$  auftretende Funktional ( $\Phi$ ) haben wir nicht explizit angegeben, weil es bei den Rechnungen hier ohnehin nicht verwendet wird. Bei Übergang zur Standardtheorie, d. h.  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $C_1 = C_2$  und  $\bar{D} = 0$  ergibt sich exakt der von Morgan<sup>7)</sup> angegebene Ausdruck.

Es bedeuten

$$x_1 = \frac{4 m u_1^2}{k T}; \quad (B 9)$$

$L_1$ ,  $L_2$  sind Konstanten, die von  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  und  $\bar{D}$  abhängen.

### Appendix C

#### Abschätzung der in der Beweglichkeit vernachlässigten Terme

Wir verwenden folgendes Modell:

a) Kugelförmige Energiefächer:  $E = \frac{\hbar^2 l^2}{2 m}$ ,

b) elastische Elektron-Phonon-Stöße:

$$\delta [E(t') - E(t) \pm \hbar \omega] \approx \delta (E(t') - E(t)),$$

c) Wechselwirkung allein mit akustischen Phononen,

d) Phononen-Gleichverteilung  $n \approx (n+1) \approx \frac{k T}{\hbar \omega}$ ,

gangs-  
n und  
n oder  
stalls: in (A 2) ist  $C(\varrho) = C_1 \cdot 1$ ,  $\bar{D}(\varrho) = 0$  zu setzen.

Damit wird aus (A 2) mit den in (B 3) eingeführten Polarisationsvektoren:

$$(B 6) \quad \begin{aligned} P_{t \pm w, t} &= \frac{2 \pi k T}{\hbar \omega N M u |w|} \cdot \frac{|w|^2}{2} |C_1|^2 \delta(E(t \pm w) - E(t)) \\ P(t', t) &= P(t, t') = \frac{\pi |C_1|^2}{N M u^2 \hbar} \delta(x' - x), \text{ wo } x = \frac{E(t)}{k T}. \end{aligned} \quad (C 1)$$

Also finden wir für die Operatoren  $A_l$  ( $l \neq 0$ ) nach (9):

$$(B 7) \quad \begin{aligned} A_l \Phi &= \frac{N \Delta}{8 \pi^3} \int P(t', t) M(x) [\Phi(x) - P_l(\cos \theta) \Phi(x')] d^3 t' \\ &= \frac{\Delta |C_1|^2}{8 \pi^2 M \hbar u^2} M(x) \Phi(x) \int \delta(x' - x) (1 - P_l(\cos \theta)) d^3 t'. \end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der  $P_l(\cos \theta)$  finden wir weiter:

$$(B 8) \quad A_l \Phi = \frac{\Delta |C_1|^2}{8 \pi^2 M \hbar u^2} M(x) \Phi(x) \int \delta(x' - x) d^3 t' = W \sqrt{x} M(x) \Phi(x)$$

mit der in (B 7) eingeführten Konstanten  $W$ . Alle Stoßoperatoren  $A_l$  für  $l \geq 1$  führen also zur gleichen Relaxationszeit

$$(C 2) \quad \tau^{-1} = W \sqrt{x}.$$

Aus (6,13) erhalten wir für den hier betrachteten Fall den einfachen Ausdruck für die Beweglichkeit:

$$(B 9) \quad \mu = \frac{4 e}{3 m \sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\infty \tau(x) x^{3/2} \frac{d}{dx} (e^{-x} \Phi_0) dx + \frac{2}{5} \int_0^\infty \tau(x) \frac{d}{dx} (x^{3/2} e^{-x} \Phi_2) dx \right\}.$$

Mit

$$\Phi_0 = 1 + a_{01} F^2 \text{ und } \Phi_2 = a_{22} F^2$$

ist zwecks Abschätzung zu berechnen:

$$(B 9) \quad \frac{\frac{2}{5} \int_0^\infty \tau(x) \frac{d}{dx} (x^{3/2} e^{-x} a_{22}) dx}{\int_0^\infty \tau(x) \frac{d}{dx} (e^{-x} a_{01}) x^{3/2} dx} = Q.$$

Wir berechnen die Koeffizienten  $a$ :

$$S_{10} = A_1 a_{11} = W \sqrt{x} e^{-x} a_{11}.$$

Daraus

$$(B 9) \quad a_{11} = - \frac{2 e}{W \sqrt{2 m k T}} = \text{const.} \quad (C 3)$$

Weiter ergibt sich  $a_{22}$  aus

$$S_{21} a_{11} = a_{11} S_{21} = A_2 a_{22} = W \sqrt{x} e^{-x} a_{22}$$

zu

$$(B 9) \quad a_{22} = \frac{4 e^2}{3 W m k T} \left( 1 + \frac{1}{2 x} \right). \quad (C 4)$$

Schließlich berechnet sich  $a_{01}$  aus

$$S_{01} a_{11} = a_{11} S_{01} = A_0 a_{01}$$

mit dem von (Adawi II, 6) angegebenen Stoßterm  $A_0$ :

$$A_0 \Phi = - \frac{W x_1}{2 \sqrt{x}} \frac{d}{dx} \left( e^{-x} x^2 \frac{d\Phi}{dx} \right)$$

(die Konstante  $x_1$  ist in (B 9) definiert).

$$a_{01} = \frac{4 e^2}{3 W x_1 m k T} \ln x + \text{const.}$$

Die Konstante folgt aus der Bedingung

$$\int_0^{\infty} e^{-x} a_{01} \sqrt{x} dx = 0.$$

Endgültig ist also

$$a_{01} = \frac{4 e^2}{3 W x_1 m k T} \left( \ln x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma' \left( \frac{3}{2} \right) \right). \quad (\text{C } 5)$$

Das setzt man in den zu berechnenden Quotienten  $Q$  ein:

$$Q = \frac{\frac{2}{5} \int_0^{\infty} \sqrt{x} \frac{d}{dx} \left( x^{3/2} e^{-x} \left( 1 + \frac{1}{2} x \right) \right) dx}{\frac{1}{x_1} \int_0^{\infty} \sqrt{x} x^{3/2} \frac{d}{dx} \left[ e^{-x} \left( \ln x - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma' \left( \frac{3}{2} \right) \right) \right] dx} = \frac{\frac{2}{5} x_1 \left( -\frac{1}{4} \right)}{1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Gamma' \left( \frac{3}{2} \right) - \Gamma' (3)} = \frac{x_1}{7,7}.$$

Da  $x_1 = 4 m u^2 / k T$ , und  $3 m u^2$  etwa  $1^{\circ}\text{K}$  entspricht, ist also für Temperaturen größer als  $10^{\circ}\text{K}$  die Korrektur höchstens  $1\%$ , und kann daher fortgelassen werden.

Berlin, Physikalisch-Technisches Institut der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 14. Januar 1961.

## **Trennung gasförmiger Gemische durch Dampfstrom**

*Von A. S. Kompanejez*

### **Inhaltsübersicht**

Es wird die Leistungsfähigkeit des Trennprozesses eines Gemisches zweier Komponenten mit nahezu gleichen Diffusionskoeffizienten durch einen waagerechten Dampfstrom in einem Trennrohr mit nachfolgender Anreicherung in gegenläufigen Konvektionsströmen längs der Achse des Trennrohrs betrachtet.

Bekanntlich folgt die Konzentration bei Diffusion eines Stoffes in einen

Strom entgegen der Stromrichtung dem Exponentialgesetz  $e^{-\frac{Vx}{D}}$ , wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Stromes,  $D$  der Diffusionskoeffizient und  $x$  die durchströmte Strecke ist. Wenn man zwei Stoffe in einen dritten diffundiert, so muß ein Trenneffekt auftreten, der um so größer ist, je größer unter den gegebenen Bedingungen die Geschwindigkeit des Stromes ist. Man kann sogar den Schluß ziehen, daß die Trennung bei genügend großer Geschwindigkeit unendlich wächst. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, nach welchem Gesetz die Leistungsfähigkeit des Prozesses in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Dampfes wächst. Die Geschwindigkeit des Dampfes ist ein zusätzlicher freier Parameter im Trennprozeß, im Vergleich zur Trennung bei Diffusion des Stoffes im unbeweglichen Medium.

Nach einem Vorschlag von F. Lange (1944) wird man eine solche Trennung im Strom vorteilhaft mit einem Trennrohr, ähnlich dem Clusius-schen Thermodiffusionstrennrohr, durchführen. Es ist zweckmäßig, den Strom des zu trennenden Stoffes in gasförmigem Zustand zu haben, damit der in der Achse des Trennrohrs gasförmige Stoff an der äußeren Oberfläche kondensiert wird. Längs der Achse des Trennrohrs müssen sich die irgendwie erzeugten gegenläufigen Ströme des zu trennenden Stoffes bewegen, die dabei dauernd von beiden Anteilen angereichert werden. Infolgedessen wird an einem Ende eine erhöhte Konzentration jenes Anteils erhalten, den man auswählt.

Der Diffusionskoeffizient bei Diffusion eines Gases in ein anderes hängt in erster Näherung von dem Molekulargewicht des leichteren Gases ab. Deshalb wird, wenn das Molekulargewicht des Dampfes geringer ist als das der zu trennenden Komponenten, der Unterschied zwischen den Diffusionskoeffizienten beider Komponenten in Dampf relativ klein sein (wenn sich die Transportstoßquerschnitte zwischen den Molekülen wenig voneinander unterscheiden). Die Annahme, daß die Diffusionskoeffizienten nahezu gleich sind, wird den weiteren Berechnungen zugrunde gelegt.

### 1. Primärer Trenneffekt

Bezeichnen wir die Partialdrücke der ersten und zweiten Komponente mit  $P_a$  und  $P_b$ , ihre Volumenkonzentrationen mit  $n_a$  und  $n_b$  und die mittleren Geschwindigkeiten der Bewegung im Dampfstrom mit  $v_a$  und  $v_b$ ; für den Dampf versetzen wir die entsprechenden Größen mit dem Index  $D$ . Dann können in der linearen Näherung die Gradienten der Partialdrücke durch die relativen Geschwindigkeiten der gerichteten Bewegung des Stoffes ausgedrückt werden:

$$-\frac{\partial P_a}{\partial x} = (a, b) n_a n_b (v_a - v_b) + (a, D) n_a n_D (v_a - v_D) \quad (1a)$$

$$-\frac{\partial P_b}{\partial x} = (b, a) n_b n_a (v_b - v_a) + (b, D) n_b n_D (v_b - v_D). \quad (1b)$$

Bezüglich der Trennkoeffizienten  $(a, b)$  und  $(a, D)$  usw. machen wir folgende Annahme:

$$(a, b) = (b, a); (a, D) = (D, a); (b, D) = (D, b). \quad (2)$$

So erhalten wir, wenn wir analog (1a, b) die Gleichung für den Dampf aufstellen und alle drei Gleichungen addieren,

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (P_a + P_b + P_D) = 0,$$

d. h. der Gesamtdruck im Gerät ist konstant.

Die Relationen (2) sind dem Theorem von Onsager in der statistischen Physik analog.

Im Falle der binären Diffusion ist bekannt, daß die Koeffizienten  $(a, D)$  oder  $(b, D)$  kaum von der relativen Konzentration der Komponenten und des Dampfes abhängen. Die gesamte Änderung des Diffusionskoeffizienten mit der Konzentration beträgt 5–7% seines Gesamtwertes. Wir setzen voraus, daß auch die Koeffizienten in dem dreifachen Gemisch diese Eigenschaft besitzen, d. h. wir betrachten  $(a, D)$ ,  $(b, D)$ ,  $(a, b)$  im weiteren als konstant.

Entsprechend dem oben Gesagten nehmen wir an, daß die Koeffizienten  $(a, D)$  und  $(b, D)$  etwa die gleiche Größe haben, so daß

$$\eta \equiv \frac{(a, D) - (b, D)}{(a, D)} \ll 1.$$

Wenn wir die Gleichungen (1a), (1b) nach  $v_a$  auflösen, so erhalten wir

$$v_a = \frac{[(a, b) n_a n_b + (b, D) n_b n_D] \left[ -\frac{\partial P_a}{\partial x} + (a, D) n_a n_b v_D \right] + (a, b) n_a n_b \left[ -\frac{\partial P_b}{\partial x} + (b, D) n_b n_D v_D \right]}{[(a, b) n_a n_b + (a, D) n_a n_D] [(a, b) n_a n_b + (b, D) n_b n_D] - (a, D) (b, D) n_a^2 n_b^2} \quad (4)$$

und entsprechend auch  $v_b$ .

Wir suchen jetzt den Strom der Komponente a längs x, d. h. in Richtung der Geschwindigkeit des Dampfes. Hierbei braucht man nicht den gesamten Strom  $I_a = n_a v_a$  zu suchen, sondern nur seinen „trennenden“ Teil

$$I'_a = I_a - \frac{n_a}{n_a + n_b} (I_a + I_b) \equiv \frac{n_a n_b (v_a - v_b)}{n_a + n_b} \quad (5)$$

oder anders ausgedrückt, man subtrahiert von  $I_a$  den Teil, der mit dem gesamten Stoff übertragen ist. Durch Einführung der Bezeichnung

$$\lambda = \frac{P_a}{P_a + P_b} \quad (6)$$

kann man  $I'_a$  unter Beachtung von (3) auf die Form

$$I'_a = \frac{k T}{(a, b) + (a, D) P_D / (P_a + P_b)} \left[ -\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda(1 - \lambda) \eta \frac{\partial}{\partial x} \ln (P_a + P_b) \right] \quad (7)$$

bringen, wobei  $k$  die Boltzmannsche Konstante und  $T$  die absolute Temperatur ist.

Unter Anwendung von (7) erhalten wir jetzt die Abhängigkeit zwischen der sich ergebenden radialen Anreicherung (Quer-Anreicherung) im Trennrohr und dem mittleren Strom durch den Querschnitt

$$\bar{I}'_a = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} I'_a dx. \quad (8)$$

Im rechten Teil von (7) muß man bei der Mittlung berücksichtigen, daß  $\eta$  sehr klein ist. Durch Mittlung des ersten Gliedes in der eckigen Klammer erhalten wir den Ausdruck

$$A \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} A \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx, \quad (9)$$

wobei die Größe  $A$  keiner Erläuterungen bedarf. Die Ableitung  $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$  mit einer Genauigkeit bis auf Größen zweiter Ordnung von  $\eta$  ist  $\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{r_2 - r_1}$ , so daß man nur  $A$  mitteln muß. Im zweiten Glied der eckigen Klammer genügt es,  $\lambda(1 - \lambda)$  als konstant bezüglich des Querschnittes anzusehen.

Wir erhalten

$$I'_a = \frac{r_2 - r_1}{\bar{v}' \delta} = -(\lambda_1 - \lambda_2) + \varepsilon \lambda(1 - \lambda), \quad (10)$$

dabei ist

$$\frac{1}{\bar{v}'} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{(a, b) + \frac{P_D}{P_a + P_b}} \quad (11a)$$

$$\frac{1}{\bar{v}''} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{(a, b) + \frac{P_D}{(a, D)}} \frac{\partial \ln (P_a + P_b)}{\partial x} \quad (11b)$$

$$\frac{(a, D)}{k T} = \frac{1}{\delta} \quad (12)$$

$$\eta \frac{\bar{v}'}{\bar{v}''} = \varepsilon. \quad (13)$$

Die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf den inneren und äußeren Teil des Trennrohrs.

## 2. Anreicherung längs der Achse

Wir stellen jetzt die Gleichgewichtsgleichungen für die zirkulierenden Ströme längs der Achse auf. Bezeichnen wir die gegenläufigen Zirkulationsströme mit  $K_1$  bzw.  $K_2$ , wobei die Bedeutung der Indizes 1 und 2 klar ist.

Dann haben wir für die Gesamtentnahme aus dem Trennrohr

$$L = K_1 - K_2 \quad (14)$$

und für die Komponente  $a$ :

$$L_a = K_1 \lambda_1 - K_2 \lambda_2 - S \delta \frac{d\lambda}{dz}. \quad (15)$$

Hier berücksichtigt das letzte Glied rechts die Rückdiffusion im Trennrohr,  $S$  die Weite des Trennrohrs. Aus den Gleichungen (14) und (15) erhalten wir die in (10) eingehende Differenz der Konzentrationen

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{L_a - L\lambda}{K} + \frac{\delta S}{K} \frac{d\lambda}{dz}, \quad (16)$$

wobei  $\lambda$  und  $K$  bereits die Mittelwerte bedeuten:

$$\lambda = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2); \quad K = \frac{1}{2} (K_1 + K_2).$$

Der zu trennende Strom  $I'_a$  kann auch durch die longitudinalen Ströme ausgedrückt werden. Wenn man annimmt, daß sich das zu trennende Gemisch in der flüssigen Phase des sich kondensierenden Dampfes überhaupt nicht löst, so ist

$$2\pi r I'_a = 2\pi r [I_a - \lambda(I_a + I_b)] = \frac{d}{dz} \lambda K - \lambda \frac{dK}{dz} = K \frac{d\lambda}{dz}. \quad (17)$$

Hier ist  $r$  der mittlere Radius des Kreisringes, in dem der Übergang vom absteigenden zum aufsteigenden Strom vor sich geht. Das der Rückdiffusion entsprechende Glied wurde in dieser Formel weggelassen, da es in der Gleichgewichtsgleichung einen Beitrag liefert, der proportional  $\frac{d^2 \lambda}{dz^2}$  ist, d. h. einen Beitrag der Größenordnung  $\eta^2$ . Dieses Glied kann sich nur in der Nähe der Enden des Trennrohrs wesentlich auswirken, wo eine weitere Grenzbedingung entsprechend der höheren Ordnung der Differentialgleichung aufzustellen wäre. In der Nähe der Enden des Trennrohrs jedoch, wo der Konvektionsstrom seine Richtung in die entgegengesetzte ändert, verliert die Gleichung selbst ihren Sinn, deshalb ist es sinnlos, das Glied mit der zweiten Ableitung zu berücksichtigen. In (16) geht die Rückdiffusion in das Glied mit der ersten Ableitung ein und wurde deshalb in jener Größenordnung berücksichtigt, wie dies notwendig ist.

Durch Einsetzen von (16) und (17) in (10) kommen wir zu der Trenngleichung, die zum ersten Mal in<sup>1)</sup> für das Thermodiffusionstrennrohr erhalten wurde:

$$\left( \frac{r_2 - r_1}{2\pi r} \frac{1}{\nu \delta} K + \frac{S\delta}{K} \right) \frac{d\lambda}{dz} - \varepsilon \lambda (1 - \lambda) + \frac{L_a - \lambda L}{K} = 0. \quad (18)$$

### 3. Optimales Trennverfahren

Bei Ableitung der Gleichung (18) wurde nirgends angenommen, daß der Konvektionsstrom  $K$  längs des Trennrohrs konstant ist. Deshalb kann man  $K$  so wählen, daß man die größte Entnahme  $L$  bei gegebener Anreicherung erhält. Es sei die Anfangskonzentration des gewählten Stoffes  $\lambda_0$ , die Endkonzentration  $F\lambda_0$ , dann ist

$$L_a = F\lambda_0 L. \quad (19)$$

Um das optimale System zu finden, ist es zweckmäßig,  $K$  nicht als Funktion von  $z$ , sondern von  $\lambda$  zu betrachten. Die offensichtliche Abhängigkeit des Wertes  $K$  von  $z$  kann dann durch die Umwandlung der Formeln, die  $K$  und  $\lambda$  parametrisch angeben, gefunden werden.  $L_a$  oder, was dasselbe ist,  $L$  ist

<sup>1)</sup> W. H. Furry, R. Jones and L. Onsager, Physic. Rev. 55, 1083, (1939).

ein implizites Funktional von  $K$ , entsprechend dem Integral

$$z_0 = \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \left[ \left( \frac{r_2 - r_1}{2\pi r} \frac{K}{\bar{v} \delta} + \frac{S\delta}{K} \right) / \left( \varepsilon \lambda (1 - \lambda) - L \frac{F\lambda_0 - \lambda}{K} \right) \right] d\lambda. \quad (20)$$

Die Funktion  $K(\lambda)$ , die den größten Wert  $L$  gibt, wird aus dem Integral (20) folgendermaßen gefunden. Durch Variation des Funktionalen

$$z_0 = \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \Phi(K(\lambda), L, \lambda) d\lambda \quad (21)$$

nach  $K, L$  erhalten wir

$$\delta z_0 = \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \delta \Phi \{ K(\lambda), L, \lambda \} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial K} \delta K + \frac{\partial \Phi}{\partial L} dL \right) d\lambda = 0. \quad (22)$$

Da im Maximum  $dL = 0$  ist, erhalten wir die Bedingung für  $K$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial K} = 0. \quad (23)$$

Aus (20) erhalten wir hiermit

$$K = \frac{L(F\lambda_0 - \lambda)}{\varepsilon \lambda (1 - \lambda)} + \sqrt{\left[ \frac{L(F\lambda_0 - \lambda)}{\varepsilon \lambda (1 - \lambda)} \right]^2 + \frac{2\pi r \delta^2 S \bar{v}}{r_2 - r_1}}. \quad (24)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes für  $K$  in (20) kommen wir zur Gleichung für die größte Entnahme

$$z_0 = L \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{r_2 - r_1}{2\pi r \bar{v} \delta} \left( \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \frac{d\lambda}{\lambda (1 - \lambda)} \sqrt{\left[ \frac{F\lambda_0 - \lambda}{\lambda (1 - \lambda)} \right]^2 + \psi} + \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \frac{d\lambda (F\lambda_0 - \lambda)}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2} \right). \quad (25)$$

Hier ist

$$\psi = \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{L^2} \cdot \frac{2\pi r}{r_2 - r_1} S \bar{v}. \quad (26)$$

Der Ausdruck (25) ist ziemlich kompliziert. Deshalb nimmt man zweckmäßigerverweise die genäherte Formel, die für kleine  $\psi$  anwendbar ist, d. h. wenn der Einfluß der Rückdiffusion nicht entscheidend ist.

Dann wird das erste Integral, das in (25) eingeht, auf die Form

$$\int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \frac{d\lambda}{\lambda (1 - \lambda)} \sqrt{\left[ \frac{F\lambda_0 - \lambda}{\lambda (1 - \lambda)} \right]^2 + \psi} \cong \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \frac{F\lambda_0 - \lambda}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2} d\lambda + \frac{\psi}{4} \ln \frac{\psi F^2 (1 - F\lambda_0)^2}{4\pi e (F - 1)} \quad (27)$$

gebracht ( $e = 2,718$ ).

Ganz ohne Berücksichtigung der Rückdiffusion wird der bekannte Ausdruck für die optimale Entnahme erhalten:

$$L_a = F\lambda_0 L = \frac{2\pi r \bar{v} \varepsilon^2 \delta z_0}{4(r_2 - r_1)} \cdot F\lambda_0 \left( \int_{\lambda_0}^{F\lambda_0} \frac{d\lambda (F\lambda_0 - \lambda)}{\lambda^2 (1 - \lambda)^2} \right)^{-1}. \quad (28)$$

Sie wird erreicht, wenn die Anreicherung in einem beliebigen Querschnitt gleich der Hälfte der Anreicherung ohne Entnahme ist [vgl. (24) bei  $\delta = 0$ ]. Die in der vorliegenden Arbeit angewandte Methode der Variation des Funktionalen gestattet im Prinzip das Auffinden des optimalen Systems der Trennung unter allgemeineren Annahmen, d. h. mit Berücksichtigung der Rückdiffusion.

Es bleibt noch die Abhängigkeit des primären Effektes von dem trennenden Dampfstrom zu finden. Aus den Ausdrücken (25), (26) ist ersichtlich, daß eine Zunahme des primären Effektes unabhängig von der Auswahl der besten Funktion  $K(\lambda)$  ist, da  $L$  nur in die Kombination  $L/\varepsilon^2 \bar{v}'$  eingeht.

Bestimmen wir nun den Ausdruck  $\varepsilon^2 \nu'$ . Berechnen wir zuerst  $\bar{v}'$  und  $\bar{v}''$ . Hierzu kann man die Differenz der Diffusionskoeffizienten beider zu trennender Komponenten vernachlässigen und einfache die Diffusion des Dampfes durch das Gemisch betrachten. Für den Partialdampfdruck erhalten wir dann analog (1a, b) die Gleichung

$$-\frac{\partial P_D}{\partial x} = (a, D) v_D \mathbf{n}_D n; \quad (n = n_a + n_b), \quad (29)$$

wo die radiale Geschwindigkeit des zu trennenden Gemisches gleich Null ist, da sich gemäß der Annahme das Gemisch nicht in der flüssigen Phase löst und sich nicht von ihr fortreißen läßt. Wir bezeichnen die Dichte des Dampfstromes mit  $j$  und schreiben (29) in der Form

$$-\frac{\partial P_D}{\partial x} = \delta j (P_0 - P_D). \quad (30)$$

Es ist günstig,  $j$  und die Integrationskonstante der Gleichung (30) so zu wählen, daß man die Partialdrucke des Dampfes und des Gemisches durch den Partialdruck des Gemisches  $P_1$  bei  $r = r_1$  und durch  $P_2$  bei  $r = r_2$  ausdrücken kann. Dies ergibt

$$P = P_1 \exp \left[ \frac{x - r_1}{r_2 - r_1} \ln \frac{P_2}{P_1} \right]. \quad (31)$$

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß  $r \gg r_2 - r_1$ , so finden wir die Mittelwerte

$$\frac{1}{\bar{v}'} = \frac{1}{(U-1) \ln \frac{P_2}{P_1}} \ln \frac{(U-1) P_2 + P_0}{(U-1) P_1 + P_0} \quad (32a)$$

$$\frac{\bar{v}'}{\bar{v}''} = \ln \frac{P_2}{P_1}, \quad (31b)$$

wobei

$$U = \frac{(a, b)}{(a, D)}.$$

Dann wird die Größe  $\varepsilon^2 \bar{v}'$ , die in die Leistungsfähigkeit eingeht, so ausgedrückt:

$$\varepsilon^2 \bar{v}' = (U-1) \ln^3 \frac{P_2}{P_1} \left( \ln \frac{(U-1) P_2 + P_0}{(U-1) P_1 + P_0} \right)^{-1}. \quad (33)$$

Aus (33) ist ersichtlich, daß es vorteilhaft ist, möglichst kleine Werte  $P_1$  zu wählen, d. h. möglichst kleine Werte des Partialdruckes des Gemisches an dem inneren Radius.

Zum Schluß möchte ich Prof. F. Lange, der diese Arbeit angeregt und durch wesentliche Diskussionen unterstützt hat, herzlichst danken.

Berlin, Institut für Medizin und Biologie, Bereich Physik, der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 21. Januar 1961.

# Energie, Impuls und Drehimpuls in der allgemeinen Relativitätstheorie

Von Georg Dautcourt

## Inhaltsübersicht

Es werden die nach dem Noetherschen Satz aus der Lagrangedichte des Gravitationsfeldes  $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} + \mathfrak{A}_\lambda^4$  ( $\mathfrak{R}$  der mit  $\sqrt{-g}$  multiplizierte Krümmungsskalar,  $\mathfrak{A}_\lambda^4$  eine aus den  $g_{\mu\nu}$  gebildete Divergenz) folgenden Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltungssätze angegeben und die Gesamtwerte für zeitunabhängige Felder berechnet und verglichen.

## 1. Einleitung

Die Frage nach der Energie des Gravitationsfeldes wurde in den letzten Jahren besonders eingehend diskutiert. Wie bekannt ist, bestehen in allgemein-kovarianten Feldtheorien wegen der Existenz von Bianchiidentitäten zahlreiche Definitionsmöglichkeiten. Die Forderung, daß Energie und Impuls sich nach dem in der Feldtheorie üblichen Noetherschen Verfahren<sup>1)</sup> aus der Invarianz des Wirkungsintegrals gegenüber infinitesimalen Koordinatentranslationen ergeben müssen, schränkt diese Möglichkeiten zwar ein, macht sie aber nicht eindeutig. Im Gegensatz zu der Lage bei speziell-relativistischen Feldtheorien hängt in der allgemeinen Relativitätstheorie die Gesamtenergie von der Wahl der zur Lagrangedichte des Feldes hinzufügbaren Divergenz ab. Diese Abhängigkeit wollen wir hier näher untersuchen und dabei auch den Drehimpuls mit einbeziehen.

Die allgemeine, die Einsteinschen Feldgleichungen liefernde Lagrangedichte des Gravitationsfeldes hat die Gestalt<sup>2)</sup>:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{A}^4}{\partial x^\lambda} + \mathfrak{R}, \quad (1)$$

wo  $\mathfrak{A}^4$  von den Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  und diesen selbst sowie von der Levi-Civitá-Dichte  $\eta^{\mu\nu\rho\sigma}$  abhängen kann und  $\mathfrak{R}$  die Dichte des Krümmungsskalars ist. Im folgenden wird für  $\mathfrak{A}^4$  eine von zwei Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  abhängende konkrete Form angegeben. Aus (1) erhält man dann als Spezialfälle die Einsteinsche Affintensor-dichte<sup>3)</sup> (für  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1/2$ ) sowie die Affintensor-

<sup>1)</sup> E. Noether, Göttinger Nachrichten 1918, 235.

<sup>2)</sup> Das Vorzeichen von  $R_{\mu\nu}$  sei durch  $R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\mu,\nu}^\lambda + \dots$ , die Signatur der  $g_{\mu\nu}$  durch  $(+1, -1, -1, -1)$  festgelegt. Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3.

<sup>3)</sup> A. Einstein, Berliner Berichte 1918, 448.

dichte von Lorentz und Klein<sup>4)</sup> (für  $a_1 = a_2 = 0$  oder  $\mathfrak{A}^i = 0$ ) bzw. den um den Faktor 2 davon verschiedenen Möllerschen Ausdruck<sup>5)</sup>.

Für die aus (1) folgende allgemeine Affintensordichte berechnen und vergleichen wir Energie, Impuls und Drehimpuls zeitunabhängiger Felder. Es ergibt sich dabei folgende Tatsache: Die Forderung, daß beim Grenzübergang  $\kappa \rightarrow 0$  ( $\kappa$  die Einsteinsche Gravitationskonstante) zur speziellen Relativitätstheorie sich Energie und Drehimpuls auf die speziell-relativistischen Werte für den das zeitunabhängige Gravitationsfeld erzeugenden Körper reduzieren sollen, ist mit dem kanonischen Formalismus nur für die Parameterwerte  $a_1 + a_2 = 1/2$  verträglich. Insbesondere gehört dazu der Einsteinsche Ausdruck, der zugleich noch eindeutig durch die Eigenschaft gekennzeichnet ist, im gravitativen Anteil nur von den ersten Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$ , abzuhängen.

## 2. Der Energie-Impulserhaltungssatz

Im Prinzip kann die Divergenz in (1) von beliebig hohen Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  abhängen. Der Einfachheit halber fordern wir jedoch, daß sie — ebenso wie  $\mathfrak{A}$  — höchstens die zweiten Ableitungen  $g_{\mu\nu,\alpha\sigma}$  enthalten soll. Die Affindichte  $\mathfrak{A}^i$  kann demnach nur Funktion der  $g_{\mu\nu}$  und ihrer ersten Ableitungen sowie der  $\eta^{\mu\nu\alpha\sigma}$  sein. Ferner nehmen wir an, daß  $\mathfrak{A}^i$  in eine Potenzreihe nach den  $g_{\mu\nu}$ ,  $\eta^{\mu\nu\alpha\sigma}$  entwickelbar ist.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^i = & \sqrt{-g} \underset{0}{A}^i + \sqrt{-g} \underset{1}{A}^i{}^{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\beta,\gamma} + \sqrt{-g} \underset{2}{A}^i{}^{\alpha\beta\gamma\varrho\sigma\tau} g_{\alpha\beta,\gamma} g_{\varrho\sigma,\tau} \\ & + \sqrt{-g} \underset{3}{A}^i{}^{\alpha\beta\gamma\varrho\sigma\tau\lambda\mu} g_{\alpha\beta,\gamma} g_{\varrho\sigma,\tau} g_{\lambda\mu} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Hierbei hängen die Größen  $\underset{i}{A}^i$  nur von den  $g_{\mu\nu}$  und der Levi-Civita-Dichte  $\eta^{\mu\nu\alpha\sigma}$  ab und müssen sich bei affinen Transformationen wie kontravariante Tensoren der entsprechenden Stufe transformieren. Dann verschwinden aber die Ausdrücke mit geradem  $i$ , da es keine tensoriellen algebraischen Komitanten der  $g_{\mu\nu}$  gibt, die eine ungerade Anzahl von Indizes tragen<sup>6)</sup>. Ferner wollen wir alle Glieder ab  $\underset{3}{A}^i$  fortlassen, da sie, wie wir zeigen werden, wegen ihres raschen Verschwindens im räumlich Unendlichen bei zeitunabhängigen Feldern zu keinen Beiträgen für die Gesamtwerte von Energie und Impuls führen<sup>7)</sup>. Übrig bleibt  $\mathfrak{A}^i = \sqrt{-g} \underset{1}{A}^i{}^{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\beta,\gamma}$ . Die allgemeine aus  $g_{\mu\nu}$  bildbare tensorielle Komitante mit den vier kontravarianten Indizes  $\lambda\alpha\beta\gamma$  und Symmetrie in  $\alpha\beta$  besitzt die Struktur

$$A^i{}^{\alpha\beta\gamma} = a_1 g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} + a_2 (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\lambda} + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma})$$

mit zwei Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  (eine echte Abhängigkeit von  $\eta^{\mu\nu\alpha\sigma}$  scheint wegen der Symmetrieeigenschaften von  $\eta^{\mu\nu\alpha\sigma}$  und  $A^i{}^{\alpha\beta\gamma}$  nicht möglich zu sein). Als

<sup>4)</sup> H. A. Lorentz, Amst. Versl. **25**, 468 (1916); F. Klein, Göttinger Nachrichten **1918**, 171.

<sup>5)</sup> C. Möller, Annals of Physics **4**, 347 (1958).

<sup>6)</sup> Siehe etwa S. Golab, M. Kucharzewski, Acta Math. Hung. **11**, 173 (1960). Der hier gegebene sehr einfache Beweis überträgt sich unmittelbar auf den Fall, daß die Größen  $A^i$  auch noch  $\eta^{\mu\nu\alpha\sigma}$  enthalten.

<sup>7)</sup> Bei zeitabhängigen Feldern könnte noch der Term mit  $A^i$  einen Beitrag zum Energieintegral liefern, nicht mehr dagegen die höheren Terme.

konkrete Gestalt für  $\mathfrak{A}^\lambda$  können wir demnach

$$\mathfrak{A}^\lambda = \sqrt{-g} a_1 g^{\alpha\beta} g^{\lambda\gamma} g_{\alpha\beta,\gamma} + \sqrt{-g} a_2 g_{\alpha\beta,\gamma} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\lambda} + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma}) \quad (3)$$

annehmen.

$\mathfrak{L}$  verhält sich, wenn  $\mathfrak{A}_{\nu,\lambda}^\lambda$  von Null verschieden ist, nur gegenüber affinen Transformationen wie eine invariante Dichte, und aus dem Noetherschen Satz folgt lediglich die Aussage

$$\mathfrak{S}_{\nu,\mu}^\mu \xi^\nu + (\mathfrak{S}_\nu^\mu - \mathfrak{B}_{\nu,\nu}^{\mu\nu}) \xi_{,\mu}^\nu = 0 \quad (4)$$

für beliebige linear von den  $x^\mu$  abhängende Erzeugende  $\xi^\nu$  einer infinitesimalen Koordinatentransformation:

$$\bar{x}^\nu = x^\nu + \xi^\nu (x^\mu) = x^\nu + a^\nu + b_{,\sigma}^\nu x^\sigma (a^\nu, b_{,\sigma}^\nu = \text{const.}) \quad (5)$$

Die in (4) eingehenden Größen  $\mathfrak{S}_\nu^\mu$ ,  $\mathfrak{B}_{\nu,\nu}^{\mu\nu}$  sind

$$\propto \mathfrak{S}_\nu^\mu = \frac{1}{2} \left( \delta_\nu^\mu \mathfrak{L} - g_{\nu\lambda,\mu} \left[ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\lambda,\mu}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\lambda,\mu\gamma}} \right] - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\lambda,\mu\gamma}} g_{\nu\lambda,\mu\gamma} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}} g_{\nu\mu}, \quad (6)$$

$$\propto \mathfrak{B}_{\nu,\nu}^{\mu\nu} = g_{\nu\sigma} \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\sigma\mu,\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\tau} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\sigma\mu,\nu\tau}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\lambda,\mu\nu}} g_{\nu\lambda,\mu} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\nu\mu,\nu\lambda}} g_{\nu\mu,\lambda}. \quad (7)$$

Setzen wir in (6) gemäß den Feldgleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\mu\nu}} g_{\nu\mu} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial g_{\mu\nu}} g_{\nu\mu} = - \left( \mathfrak{R}_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu \mathfrak{R} \right) = - \propto \mathfrak{T}_\nu^\mu,$$

so stellt  $\mathfrak{S}_\nu^\mu$  die Summe der Dichten des Materietensors und des kanonischen Pseudotensors des Gravitationsfeldes dar und kann als Gesamtenergiestotensor interpretiert werden, da mit  $\xi^\nu = \text{const}$  aus (4) der Erhaltungssatz  $\mathfrak{S}_{\nu,\mu}^\mu = 0$  folgt<sup>8)</sup>.  $\xi_{,\mu}^\nu = \text{const}$  liefert weiterhin aus (4) die Darstellung

$$\mathfrak{S}_\nu^\mu = \mathfrak{B}_{\nu,\nu}^{\mu\nu} \quad (8)$$

mit dem zunächst noch nicht antisymmetrischen „Superpotential“  $\mathfrak{B}_\nu^{\mu\nu}$ . Mit Hilfe des Ausdrückes (3) für  $\mathfrak{A}^\lambda$  erhalten wir nach direkter Rechnung für  $\mathfrak{B}_\nu^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \propto \mathfrak{B}_\nu^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\nu\beta,\gamma} \left\{ \delta_\nu^\mu (a_1 g^{\alpha\beta} g^{\gamma\nu} + 2 a_2 g^{\alpha\beta} g^{\gamma\nu}) \right. \\ \left. + \delta_\nu^\nu (g^{\alpha\beta} g^{\mu\gamma} \left[ \frac{1}{2} - a_1 \right] - [1 + 2 a_2] g^{\alpha\gamma} g^{\beta\mu}) \right. \\ \left. + \delta_\nu^\mu \left( -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \right) \right. \\ \left. + \delta_\nu^\nu (g^{\beta\mu} g^{\gamma\mu} - g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Um ein in den Indizes  $\mu$  und  $\nu$  antisymmetrisches Superpotential  $\mathfrak{U}_\nu^{\mu\nu}$  zu erhalten, machen wir den Ansatz

$$\mathfrak{U}_\nu^{\mu\nu} = \mathfrak{B}_\nu^{\mu\nu} + \mathfrak{A}_{\nu,\lambda}^{\mu\nu\lambda}. \quad (10)$$

<sup>8)</sup> Da  $\mathfrak{L}$  eine affine Dichte vom Gewicht 1 ist, haben auch alle nach (6) daraus abgeleiteten Pseudotensorsdichten das Gewicht 1. Energiedefinitionen mit anderem Gewicht, wie sie von L. Landau, E. Lifschitz, The Classical Theory of Fields, Cambridge 1951, p. 316, und J. Goldberg, Physic. Rev. 111, 315 (1958) vorgeschlagen wurden, werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Hierbei muß  $\mathfrak{A}_e^{\mu\nu\lambda}$  in  $\nu$  und  $\lambda$  antisymmetrisch sein, damit für  $\gamma_e^\mu$  gemäß

$$\mathfrak{S}_e^\mu = \mathfrak{U}_e^{\mu\nu} \quad (11)$$

derselbe Wert wie mittels  $\mathfrak{B}_e^{\mu\nu}$  nach (8) geliefert wird. Es genügt dabei die Annahme, daß  $\mathfrak{A}_e^{\mu\nu\lambda}$  nur von den  $g_{\mu\nu}$  abhängt, so daß auch  $\mathfrak{U}_e^{\mu\nu}$  nur erste Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  enthält. Der mit der Symmetriebedingung verträgliche Ansatz

$$\times \mathfrak{A}_e^{\mu\nu\lambda} = \sqrt{-g} b (g^{\mu\nu} \delta_e^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta_e^\nu) \quad (12)$$

führt mit  $b = 1/2$  zum Ziel<sup>10</sup>). Dann ergibt sich als expliziter Ausdruck für  $U_e^{\mu\nu}$ :

$$\times \mathfrak{U}_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (g_{\alpha\beta,\alpha} - g_{\alpha\alpha,\beta}) + \frac{1}{2} \sqrt{-g} (\delta_e^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_e^\nu \delta_\sigma^\mu) (a_1 g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} + 2 a_2 g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau}) g_{\alpha\beta,\tau}. \quad (13)$$

$\mathfrak{U}_e^{\mu\nu}$  stimmt bis auf einen hier durch die benutzte Langrangefunktion festgelegten Zahlenfaktor mit der von Möller<sup>10</sup>) angegebenen allgemeinen Form für ein antisymmetrisches Superpotential, das die ersten Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  nur in der ersten Potenz enthält, überein. Für  $a_1 = a_2 = 0$  ergibt (13) die Hälfte des zur Möllerschen Energiedefinition gehörigen Superpotentials und ist das der Lorentz-Kleinschen Pseudodichte entsprechende antisymmetrische Superpotential.

Die Einsteinsche Pseudodichte leitet sich von der Lagrangedichte

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta)$$

ab.  $\mathfrak{A}^\mu$  hat hier die Gestalt

$$\mathfrak{A}^\mu = \frac{(-g g^{\mu\nu})_{,\nu}}{\sqrt{-g}} = \sqrt{-g} g_{\nu\sigma,\nu} (g^{\nu\sigma} g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} g^{\nu\sigma}),$$

ist also durch die Parameterwerte  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1/2$  gekennzeichnet. Mit diesen Werten liefert (13) das Freud'sche Superpotential<sup>11)</sup>. Diese Einsteinsche Definition von Energie und Impuls ist, wie man leicht sieht, eindeutig durch die Forderung bestimmt, daß der gravitative Anteil  $t_e^\mu$  der Gesamtenergie-pseudotensordichte nur von den ersten Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  abhängen soll. Für jede andere Wahl der Konstanten  $a_1, a_2$  enthält  $t_e^\mu$  auch zweite Ableitungen.

Zu der gemischten Pseudotensordichte  $\mathfrak{S}_e^\mu$  läßt sich eine rein kontravariante Dichte  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  angeben: Wir ziehen dazu den kovarianten Index in  $\mathfrak{U}_e^{\mu\nu}$  mittels  $g^{\mu\sigma}$  hoch und setzen

$$\mathfrak{S}^{\mu\nu} = \mathfrak{U}_{,\sigma}^{\mu\nu\sigma} \equiv (\mathfrak{U}_e^{\mu\sigma} g^{\nu\sigma})_{,\sigma}. \quad (14)$$

<sup>10</sup>) Diese Antisymmetrisierung von  $\mathfrak{B}_e^{\mu\nu}$  ist auch dann nicht eindeutig, wenn man fordert, daß  $\mathfrak{U}_e^{\mu\nu}$  nur erste Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  enthalten soll; zu  $\mathfrak{U}_e^{\mu\nu}$  kann man z. B.  $a \cdot (g_{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu\tau\sigma})_{,\tau}$  hinzufügen.

<sup>11</sup>) C. Möller, Max-Planck-Festschrift, Berlin 1958, S. 139.

<sup>11</sup>) Ph. v. Freud, Annals of Math. 40, 417, (1939).

Wegen der Antisymmetrie von  $U_e^{\nu\sigma}$  in  $\nu$  und  $\sigma$  erfüllt  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  den Erhaltungssatz  $\mathfrak{S}^{\mu\nu} = 0$ .

Um die Energie- und Impuls- (sowie später die Drehimpuls-) Integrale berechnen zu können, ist die Kenntnis der in großer Entfernung vom betrachteten physikalischen System geltenden Metrik nötig. Die sogenannten „abgeschlossenen Systeme“<sup>12)</sup>, die keine Gravitationsstrahlung aussenden, sind dadurch definiert, daß das Feld in großen Entfernungen  $r$  vom System kugelsymmetrisch wird und asymptotisch Schwarzschildform annimmt. Es läßt sich leicht mit Hilfe der Feldgleichungen einsehen<sup>13)</sup>, daß zeitunabhängige Felder, deren Feldquellen auf ein endliches dreidimensionales Raumgebiet beschränkt sind und deren Metrik für  $r \rightarrow \infty$  in die Minkowskimetrik übergeht, in diesem Sinne abgeschlossen sind. Man erhält für die Metrik dieser Felder bei Verwendung der de Donder-Bedingung  $g_{\nu r}^{\mu\nu} = 0$  in großen Entfernungen  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , d. h. bei Vernachlässigung der höheren Potenzen der  $1/r$ -Entwicklung:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{i0} = \frac{n_k a_{ik}}{r^2}, \quad g_{ik} = -\delta_{ik} \left(1 + \frac{2m}{r}\right), \quad (15)$$

wobei  $m$  und  $a_{ik} = -a_{ik}$  insgesamt vier der Energie und dem Drehimpuls der Feldquellen entsprechende Konstanten sind und  $n_k$  den in die Richtung  $\vartheta, \varphi$  weisenden Einheitsvektor  $(\sin \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$  darstellt. Wichtig ist die Tatsache, daß die  $g_{i0}$  mindestens wie  $1/r^2$  verschwinden, da dadurch die Konvergenz der Drehimpulsintegrale gesichert ist.

Aus der linearen Näherung ergibt sich, daß  $a_{ik}$  mit dem das  $g_{i0}$ -Feld erzeugenden Drehimpuls des materiellen Systems,  $\mathfrak{M} = \int (\mathbf{r} \times \varrho \mathbf{v}) \, dv$ , durch

$$M_1 = \frac{4\pi}{\pi c} a_{12}, \quad M_2 = \frac{4\pi}{\pi c} a_{31}, \quad M_3 = \frac{4\pi}{\pi c} a_{12} \quad (16)$$

zusammenhängt<sup>14)</sup>.

Mit Hilfe des Superpotentials (13) und der asymptotischen Metrik (15) berechnen wir nun die Größen Gesamtenergie (mit  $\varrho = 0$ ) und Gesamtimpuls (mit  $\varrho = i$ ) eines zeitunabhängigen Systems durch Umwandlung des Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral:

$$P_\varrho = \int \mathfrak{S}_\varrho^0 \, dv = \int U_{\varrho,\mu}^{0\mu} \, dv = \int U_{\varrho,i}^{0i} \, dv = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint U_e^{0i} n_i r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (17)$$

Das Ergebnis lautet

$$P_i = 0, \quad P_0 = M c^2 \left( \frac{1}{2} + a_1 + a_2 \right), \quad (18)$$

wobei  $M = \frac{m c^2}{G}$  ist. Für die mit Hilfe der durch (14) definierten Komponenten  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  berechnete kontravariante Größe  $\int \mathfrak{S}^{\mu 0} \, dv$  ergibt sich

$$\int \mathfrak{S}^{\mu 0} \, dv = P^\mu = \eta^{\mu\nu} P_\nu, \quad (19)$$

also die kontravariante Form des Energie-Impulsvektors. Der Gesamtimpuls verschwindet stets, die Gesamtenergie ist im allgemeinen von  $M c^2$  verschieden.

<sup>12)</sup> l. c. Anm. 5.

<sup>13)</sup> Siehe etwa Landau - Lifschitz, Feldtheorie (russ.), 3. Auflage Moskau 1960, S. 363.

<sup>14)</sup> l. c. Anm. 13).

Es ist aber physikalisch sinnvoll zu verlangen, daß die Energie zeitunabhängiger Felder (die keine selbständige physikalische Bedeutung haben, sondern wesentlich vom felderzeugenden Körper abhängen) beim Übergang zur speziellen Relativitätstheorie, d. h. für  $\alpha \rightarrow 0$  den speziell-relativistischen Wert  $M c^2$  annimmt. Da gemäß (19) die Differenz  $P_0 - M c^2 = Mc^2(a_1 + a_2 - 1/2)$  von  $\alpha$  unabhängig ist, sollte auch bei endlichen Werten von  $\alpha$   $P_0 = Mc^2$  gelten, woraus die Bedingung  $a_1 + a_2 = 1/2$  folgt. Sie ist für die Einstein-sche Energiedefinition ( $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1/2$ ) erfüllt.

Um auch für die anderen Werte von  $a_1, a_2$  den „richtigen“ Betrag der Gesamtenergie des zeitunabhängigen Gravitationsfeldes zu erhalten, müssen wir von einer um einen von  $a_1$  und  $a_2$  abhängenden Faktor  $p(a_1, a_2)$  geänderten Lagragedichte  $\mathcal{L}' = p(a_1, a_2) \mathcal{L}$  ausgehen. Für die neue Pseudotensordichte  $\mathfrak{S}'^\mu_\nu$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}'^\mu_\nu &= p(a_1, a_2) \mathfrak{S}^\mu_\nu = \mathfrak{T}^\mu_\nu + (p-1) \mathfrak{T}^\mu_\nu + p \mathfrak{t}'^\mu_\nu = \mathfrak{T}^\mu_\nu + \mathfrak{t}'^\mu_\nu \\ (\mathfrak{t}'^\mu_\nu &\equiv (p-1) \mathfrak{T}^\mu_\nu + p \mathfrak{t}^\mu_\nu), \end{aligned} \quad (20)$$

und mit  $p(a_1, a_2) = \frac{1}{1/2 + a_1 + a_2}$  demnach den erforderlichen Energiewert. (Der so definierte gravitative Anteil  $\mathfrak{t}'^\mu_\nu$  ist dann natürlich nicht mehr gleich der aus  $\mathcal{L}'$  abgeleiteten kanonischen Pseudodichte  $p \mathfrak{t}^\mu_\nu$ ). Im Falle  $a_1 = a_2 = 0$  führt dieses Verfahren vom Lorentz-Kleinschen Energieausdruck<sup>15)</sup> zu der von Möller<sup>15)</sup> eingeführten Energie.

Es lässt sich jetzt sofort einsehen, daß eine Berücksichtigung höherer Glieder in der Reihe (2) keine Beiträge zu Gesamtenergie und -Impuls zeitunabhängiger Felder liefern wird: Das Superpotential  $\mathfrak{B}'^\mu_\nu$  muß, damit das entsprechende Oberflächenintegral von Null verschiedene Werte hat, Terme besitzen, die wie  $1/r^2$  im Unendlichen verschwinden. Da  $g_{\mu\nu,\nu} \sim \frac{1}{r^2}$ ,  $g_{\mu\nu,\nu\sigma} \sim \frac{1}{r^3}$  für zeitunabhängige Felder und große  $r$  gilt, folgt aus (7), daß die zusätzlichen Terme mindestens wie  $1/r^4$  verschwinden und somit nichts zu  $P_\mu$  beitragen.

### 3. Der Drehimpulserhaltungssatz

Von den möglichen Definitionen des Drehimpulses lässt sich zunächst die auf dem kanonischen Formalismus beruhende Definition von Schoenberg<sup>16)</sup> und Papapetrou<sup>17)</sup> leicht auf die allgemeine Lagragedichte (1) übertragen. Wir schreiben dazu, was wegen der Konstanz von  $\xi^\mu$  möglich ist, Gleichung (4) in der Form:

$$(\mathfrak{S}^\mu_\nu \xi^\nu - \mathfrak{B}'^\mu_\nu \xi^\nu)_{,\mu} = 0 \quad (21)$$

und führen wie bei lorentzkovarianten Feldtheorien die infinitesimale Koordinatendrehung

$$x^\theta = x^\theta + \xi^\theta \quad \text{mit} \quad \xi^\theta = \eta^{\theta\tau} \omega_{\sigma\tau} x^\sigma, \quad \omega_{\sigma\tau} = -\omega_{\tau\sigma} = \text{const} \quad (22)$$

<sup>15)</sup> I. c. Anm. 4) und 5).

<sup>16)</sup> M. Schoenberg, Physic. Rev. 59, 616 (1949).

<sup>17)</sup> A. Papapetrou, Proc. R. Irish Acad. 52, 11 (1948).

aus. Aus (21) folgt wegen der Willkür der sechs Größen  $\omega_{\alpha\tau}$  der Erhaltungssatz

$$\mathfrak{F}_{,\mu}^{\sigma\tau\mu} = 0 \quad (23)$$

für den Drehimpuls mit

$$\mathfrak{F}^{\sigma\tau\mu} = x^\sigma \eta^{\tau\varrho} \mathfrak{S}_\varrho^\mu - x^\tau \eta^{\sigma\varrho} \mathfrak{S}_\varrho^\mu + f^{\sigma\tau\mu} \quad (24)$$

und

$$f^{\sigma\tau\mu} = \eta^{\varrho\sigma} \mathfrak{B}_\varrho^{\tau\mu} - \eta^{\varrho\tau} \mathfrak{B}_\varrho^{\sigma\mu}. \quad (25)$$

Die Zerlegung (24) in  $x^\sigma \eta^{\tau\varrho} \mathfrak{S}_\varrho^\mu - x^\tau \eta^{\sigma\varrho} \mathfrak{S}_\varrho^\mu$  und  $f^{\sigma\tau\mu}$  ist die bei nichtskalaren Feldern auftretende Aufspaltung des Gesamtdrehimpulses in die Bahn- und Spindrehimpulsdichte. Es ist leicht zu sehen, daß folgende Darstellung durch ein antisymmetrisches Superpotential möglich ist:

$$\mathfrak{F}^{\sigma\tau\mu} = \mathfrak{K}_{,\nu}^{\sigma\tau\mu\nu} \quad (26)$$

mit

$$\mathfrak{K}^{\sigma\tau\mu\nu} = - \mathfrak{K}^{\sigma\tau\mu\nu} = \mathfrak{U}_\varrho^{\mu\nu} (x^\sigma \eta^{\tau\varrho} - x^\tau \eta^{\sigma\varrho}) + \mathfrak{A}_\varrho^{\lambda\mu\nu} (\delta_\lambda^\sigma \eta^{\tau\varrho} - \delta_\lambda^\tau \eta^{\sigma\varrho}). \quad (27)$$

$\mathfrak{U}_\varrho^{\mu\nu}$  und  $\mathfrak{A}_\varrho^{\lambda\mu\nu}$  sind die durch (13) und (12) gegebenen Größen.

Die Existenz der Integralwerte ist wesentlich an das Bestehen der zehn-parametrischen Lorentzgruppe im räumlich Unendlichen gebunden<sup>18)</sup>, die Integrale selbst sind jedoch über Gebiete zu erstrecken, in denen im allgemeinen keine Bewegungsgruppen vorhanden sind. Das Auftauchen von  $\eta^{\mu\nu}$  in den Gleichungen (22) – (25) ist somit rein formal.

Die Gesamtwerte des Drehimpulses, die Integrale  $\frac{1}{c} \int \mathfrak{F}^{kl0} dv$  sind, wie auf Grund des Erhaltungssatzes im Anschluß an die entsprechenden Überlegungen von Einstein<sup>19)</sup> für Energie und Impuls auch hier sofort folgt, falls sie existieren, unabhängig von der Koordinatenwahl im Innern des Integrationsgebietes.

Wir vergleichen nun die durch (24) bzw. (27) gegebenen Drehimpulsausdrücke mit der Definition von Bergmann und Thomson, die auf der Angabe des Superpotentials

$$\bar{\mathfrak{K}}^{\sigma\tau\mu\nu} = \mathfrak{U}_\varrho^{\mu\nu} (x^\sigma g^{\tau\varrho} - x^\tau g^{\sigma\varrho}) \quad (28)$$

beruht<sup>20)</sup>.

Berechnen wir die Integrale  $M^{kl} = \frac{1}{c} \int \mathfrak{F}^{kl0} dv$  wieder durch Reduktion auf Oberflächenintegrale, so erhalten wir mit der asymptotischen Metrik (15):

$$M^{kl} = \frac{4\pi}{\kappa c} a_{kl}, \quad \bar{M}^{kl} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\pi}{\kappa c} a_{kl} \quad (29)$$

<sup>18)</sup> Vgl. dazu insbesondere V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Berlin 1960.

<sup>19)</sup> I. e. Anm. 3).

<sup>20)</sup> P. G. Bergmann, R. Thomson, Physic. Rev. **89**, 400 (1953). In die ursprüngliche Definition von Bergmann und Thomson ist für  $\mathfrak{U}_\varrho^{\mu\nu}$  das Freudsche Superpotential einzusetzen. Es ist jedoch evident, daß (28) auch für alle anderen Ausdrücke (13), aber auch für die um den Faktor  $p(a_1, a_2)$  modifizierten Superpotentiale sinngemäß Anwendung finden kann.

entsprechend (27) und (28). Dieselben Argumente, die uns bei Betrachtung der Energie zeitunabhängiger Felder dazu führten, als Gesamtenergie nur den Wert  $M c^2$  als physikalisch sinnvoll anzunehmen, besagen hier, daß für den Drehimpuls dieser Felder sich der aus (16) folgende Wert  $\frac{4\pi}{\times c} a_{kl}$  ergeben sollte. Für die Schoenberg-Papapetrou sche Definition ist dies bei Benutzung der Dichte  $\mathfrak{L}$  in der Tat der Fall, während nach Bergmann und Thomson  $2/3$  des Wertes folgt. Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Konstanten  $a_1$  und  $a_2$ , im Unterschied zu der Lage bei der Energie<sup>21)</sup>. Die Definitionen von Landau und Lifschitz<sup>22)</sup> sowie Fock<sup>23)</sup> liefern denselben Drehimpuls wie diejenige von Papapetrou.

Benutzt man jedoch statt der Lagragedichte  $\mathfrak{L}$  die mit dem Korrekturfaktor  $p(a_1, a_2)$  für die Energie versehene Dichte  $\mathfrak{L}'$ , so wird der kanonische Drehimpuls wieder von  $a_1$  und  $a_2$  abhängig. Entweder ist also (bei zeitunabhängigen Feldern) die Gesamtenergie im allgemeinen von  $M c^2$  verschieden und es hat der Drehimpuls stets den Wert  $M^{kl} = \frac{4\pi}{\times c} a_{kl}$ , oder man hat für die Gesamtenergie immer  $M c^2$ , muß dann aber in Kauf nehmen, daß der Drehimpuls von  $a_1, a_2$  abhängt und im allgemeinen von  $\frac{4\pi}{\times c} a_{kl}$  verschieden ist. Nur für die durch  $p = 1$  oder  $a_1 + a_2 = 1/2$  gekennzeichneten Fälle (insbesondere also für die Einsteinsche Definition, nicht mehr hingegen für diejenige von Möller bzw. Lorentz und Klein) ist die Unstimmigkeit zwischen Energie und Drehimpuls behoben<sup>23a)</sup>.

Verzichtet man aber auf eine Ableitung nach dem „kanonischen“ Verfahren, so ist es natürlich immer möglich, für Energie und Drehimpuls verschiedene Korrekturfaktoren einzuführen. Insbesondere gilt dies für die Bergmann-Thomsonsche Definition des Drehimpulses, die ja unabhängig vom kanonischen Formalismus aufgestellt wurde. Man beachte in diesem Zusammenhang auch, daß jeder der beiden Terme auf der rechten Seite von (27) für sich allein zu einem Erhaltungssatz führt. Man könnte also den zweiten mit einem Zahlenfaktor versehen zum ersten addieren und so neue Drehimpulsausdrücke mit „richtigem“ Gesamtdrehimpuls erhalten.

Da beim Beweise der Transformationseigenschaften von  $\int \mathfrak{F}^{\mu\nu 0} dv$  die Konvergenz aller dieser Integrale vorausgesetzt werden muß, ist es nötig, diese Frage auch für die Integrale  $M^{k0} = \frac{1}{c} \int \mathfrak{F}^{k00} dv$  zu untersuchen, deren Konstanz in der speziellen Relativitätstheorie besagt, daß sich der „Schwerpunkt“ gleichförmig bewegt. Es zeigt sich bei Berechnung der Oberflächenintegrale, daß die Konvergenz für zeitunabhängige Felder gesichert ist. Die Größen  $M^{k0}$  für (27) und (28) hängen dabei von den  $1/r^2$  proportionalen

<sup>21)</sup> Die Verschiedenheit der Werte beruht darauf, daß in (27) ein Zusatzglied mit dem halben Betrage des ersten Termes auftritt; der erste Term in (27) liefert denselben Beitrag wie (28).

<sup>22)</sup> I. c. Ann. 13).

<sup>23)</sup> I. c. Ann. 18).

<sup>23a)</sup> In einer kürzlich erschienenen Arbeit [Annals of Physics 12, 118 (1961)] zeigte Möller, daß seine Energiedefinition auch aus einem anderen Grunde unbefriedigend ist: Der Energie-Impulsvektor besitzt nicht alle physikalisch erforderlichen Kovarianz-eigenschaften.

Terme in der Entwicklung von  $g_{00}, g_{ik}$ , sowie explizit von den Parametern  $a_1, a_2$  ab.

Die weitgehende Analogie der Papapetroschen Definition des Drehimpulses zu der speziell-relativistischen Behandlungsweise gestattete es, nach Belinfante<sup>24)</sup> den kanonischen Pseudotensor zu symmetrieren. Die Übertragung des Verfahrens auf die allgemeinen Lagrangedichten (1) (ohne den zusätzlichen Faktor  $p(a_1, a_2)$ ) ergibt, daß die symmetrische Pseudotensor dichte von den  $a_1, a_2$  unabhängig ist und die von Papapetrou<sup>25)</sup> angegebene, bei Benutzung der Donderschen Koordinatenbedingung  $g_{\nu}^{\mu} = 0$  sehr einfache Gestalt

$$\mathfrak{S}_{\text{sym}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \square g^{\mu\nu}, \quad \square \equiv \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad (30)$$

besitzt. Die hieraus für zeitunabhängige Felder berechneten Gesamtgrößen von Energie, Impuls und Drehimpuls haben die von uns geforderten Werte.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß sich aus dem kanonischen Formalismus auch in direkter Weise eine symmetrische Affintensor dichte vom Gewicht 1 ergibt. Wir gehen dazu von der in (14) angegebenen kontravarianten Form  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  der kanonischen Affintensor dichte aus. Man rechnet leicht nach, daß  $\mathfrak{S}^{\mu\nu}$  für die Parameterwerte  $a_1 = 1/2, a_2 = -1/2$  und nur für diese symmetrisch ist. (Es ist damit auch klar, daß es keine symmetrische Affintensor dichte vom Gewicht 1 gibt, deren gravitationeller Anteil  $\mathfrak{S}^{\mu\nu} - \mathfrak{T}^{\mu\nu}$  nur von den ersten Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  abhängt). Die hieraus für zeitunabhängige Felder berechnete Gesamtenergie beträgt nach (18) und (19)  $Mc^2/2$ . Nach Anbringen des Korrekturfaktors 2 können wir mit  $\mathfrak{S}'^{\mu\nu} = 2 \mathfrak{S}^{\mu\nu}$  eine Drehimpulsdichte durch

$$\mathfrak{J}^{\sigma\tau\mu} = x^\sigma \mathfrak{S}'^{\tau\mu} - x^\tau \mathfrak{S}'^{\sigma\mu} \quad (31)$$

definieren. Es ist leicht zu sehen, daß die Superpotentialdarstellung

$$\mathfrak{J}^{\sigma\tau\mu} = \mathfrak{R}_{\nu}^{\sigma\tau\mu\nu}$$

mit

$$\mathfrak{R}^{\sigma\tau\mu\nu} = x^\sigma \mathfrak{U}'^{\tau\mu\nu} - x^\tau \mathfrak{U}'^{\sigma\mu\nu} + 2 g^{\lambda\tau} \mathfrak{R}_{\lambda}^{\sigma\mu\nu} \quad (32)$$

möglich ist, wobei  $\mathfrak{U}'^{\tau\mu\nu} = 2 \mathfrak{U}_{\nu}^{\mu\tau} g^{\sigma\tau}$  und  $\mathfrak{U}_{\lambda}^{\mu\nu}$  durch (13) (mit  $a_1 = 1/2, a_2 = -1/2$ ),  $\mathfrak{R}_{\lambda}^{\sigma\mu\nu}$  durch (12) gegeben sind. Man erhält für das zeitunabhängige Feld wieder den doppelten Wert des zu fordernden Drehimpulses. Die Diskrepanz zwischen Energie und Drehimpuls ist also auch hier nicht beseitigt.

<sup>24)</sup> F. J. Belinfante, *Physica* 7, 449 (1940).

<sup>25)</sup> l. c. Anm. 17).

Herrn Professor Dr. A. Papapetrou sowie Herrn Dr. H. Treder möchte ich für Diskussionen und wichtige Hinweise bestens danken.

Berlin, Institut für Reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 24. Januar 1961.

# Druckkoeffizienten und Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes einiger Rhenium-Legierungen

Von E.-E. Pippig

Mit 4 Abbildungen

## Inhaltsübersicht

Es wurden gesinterte Legierungen der Zweistoffsysteme Rhenium-Kupfer, Rhenium-Silber und Rhenium-Gold untersucht. Der Rheniumgehalt betrug bis zu 30 Atom-Prozent. Die für die Druckkoeffizienten erhaltenen Werte stimmen im wesentlichen mit den entsprechenden Werten für die reinen Metalle Kupfer, Silber und Gold überein. Mit zunehmendem Rheniumgehalt werden sie betragsmäßig etwas kleiner. Die für die Temperaturkoeffizienten erhaltenen Werte lassen eine Abhängigkeit vom Rheniumgehalt nicht sicher erkennen.

## 1. Einleitung

Als praktisch brauchbares Gerät zur Messung von Drücken oberhalb von 6000 at<sup>1)</sup> hat sich bisher nur das elektrische Widerstandsmanometer durchsetzen können<sup>2)</sup>. Das Meßprinzip dieses Gerätes besteht darin, daß die druckabhängige Änderung eines elektrischen Widerstandes gemessen wird. Daher ist die Auffindung von Stoffen mit einem betragsmäßig großen Druckkoeffizienten des elektrischen Widerstandes bei gleichzeitig möglichst kleinem Temperaturkoeffizienten von praktischem Interesse<sup>3)</sup>.

Über Werkstoffe für Widerstandsmanometer faßt A. Schulze<sup>4)</sup>, Abschnitt V: Werkstoffe für Widerstandsmanometer, die bisherigen Erfahrungen dahingehend zusammen, daß alle Bedingungen, die für die Verwendung einer Legierung als Werkstoff eines Widerstandsmanometers erforderlich sind, nur bei Kupfer-, Silber- und Goldlegierungen zu erwarten sind. Aus anderen zu-

1) 1 at = 1 kp/cm<sup>2</sup>.

2) H. Ebert, Eine Konventionelle Druckskale bis 20000 at, Archiv für Technisches Messen V 1340-1, März 1951.

3) Definiert wird der Druckkoeffizient  $\gamma$  durch die Gleichung

$$R = R_0(1 + \gamma p).$$

Dabei bedeuten

$R$  den elektrischen Widerstand beim Überdruck  $p$  und

$R_0$  den elektrischen Widerstand beim Überdruck 0 (Atmosphärendruck). Entsprechend wird der Temperaturkoeffizient  $\alpha$  durch die Gleichung

$$R = R_{20} [1 + \alpha (t - t_{20})]$$

definiert. Dabei bedeuten

$R$  den elektrischen Widerstand bei der Temperatur  $t$  und

$R_{20}$  den elektrischen Widerstand bei der Temperatur  $t_{20} = 20^\circ\text{C}$ .

4) A. Schulze, Metallische Werkstoffe der Elektrotechnik, Metall-Verlag GmbH, Berlin W 15, 1950.

sammenfassenden Arbeiten von A. Schulze<sup>5)</sup> und H. Ebert und J. Gießen<sup>6)</sup> geht hervor, daß bei diesen drei Legierungsgruppen Mangan den Druckkoeffizienten in besonderem Maß vergrößert.

Wegen der Stellung des Rheniums in der gleichen Gruppe VIIa des Periodischen Systems wie das Mangan wurde nun vermutet, daß Rhenium-Legierungen den Mangan-Legierungen ähnliche Eigenschaften haben würden. Bedenken bestanden gegen diese Vermutung wegen der unterschiedlichen Kristallgitter, die Mangan bzw. Rhenium bilden.

## 2. Versuchsanordnung

Die Herstellung der Drähte erfolgte durch Mischen der pulverförmigen Metalle und anschließendes Sintern. Die gesinterten Stäbe wurden gehämmert und zu Draht vom Durchmesser 0,15 mm gezogen<sup>7)</sup>. Aus diesem Draht wurden bifilar gewickelte Spulen hergestellt, deren elektrischer Widerstand etwa den Wert  $0,5 \Omega$  hatte. Die Isolation der einzelnen Windungen erfolgte dadurch, daß die Spule nach der Fertigung lose auf einen passenden, mit Gewindegängen versehenen Trolitul-Körper gelegt wurde; einen Lacküberzug trugen die Drähte nicht. Die Widerstände wurden mit einer Kompensator-Anordnung gemessen, dabei waren die beiden Verzweigungspunkte von Strom- und Spannungspfad innerhalb des Druckraumes, so daß der Widerstand der Spulen allein, ohne den Widerstand der elektrischen Durchführung, gemessen werden konnte. Dies war möglich, da die in<sup>6)</sup>, Abb. 1 angegebene, elektrisch isolierte, druckdichte Durchführung (Widerstandsmanometerhalter) zu einer Durchführung mit 3 isolierten Leitern weiterentwickelt worden war (Abb. 1).

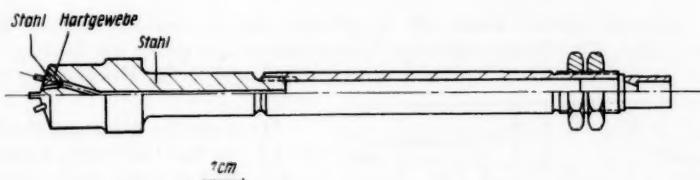


Abb. 1. Druckdichte, elektrisch isolierte Dreifach-Durchführung

Die Druckerzeugung und Druckmessung erfolgte mit einer Druckwaage für Drücke bis 6000 at, Bauart VEB Meßgeräte- und Armaturenwerk „Karl Marx“, Magdeburg.

Die Bestimmung der Druckkoeffizienten erfolgte im Druckintervall von 0 bis 6000 at bei den Temperaturen 20, 40 und 60 °C. Aus den hierbei gemessenen Widerstandswerten bei Atmosphärendruck wurde auch der mittlere Temperaturkoeffizient im Bereich von 20 bis 60 °C berechnet.

<sup>5)</sup> A. Schulze, Werkstoff für Widerstandsmanometer, Archiv für Technisches Messen I 136—9, November 1942.

<sup>6)</sup> H. Ebert u. J. Gießen, Druck- und Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes einiger Legierungen, Annalen der Physik (6) 1, 229—240 (1947).

<sup>7)</sup> Die Herstellung der Legierungen und der Drähte übernahm dankenswerterweise die Abteilung Metallforschung im VEB Berliner Glühlampenwerk.

## 3. Ergebnisse

Die Druckkoeffizienten hängen so wenig von der Temperatur ab, daß man die Ergebnisse der drei Messungen trotz der verschiedenen Temperaturen für

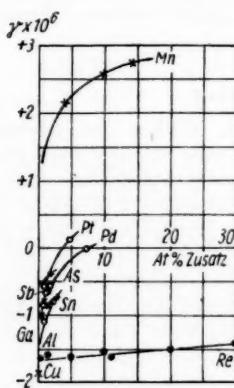


Abb. 2. Druckkoeffizient einiger Kupfer-Legierungen in Abhängigkeit vom Zusatz

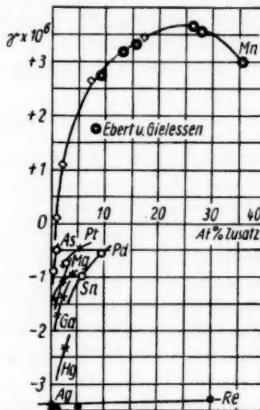


Abb. 3. Druckkoeffizient einiger Silber-Legierungen in Abhängigkeit vom Zusatz

jede Legierung mitteln kann. Die Ergebnisse sind in den Abb. 2 bis 4 dargestellt. (Die Abbildungen sind aus <sup>6)</sup> entnommen und durch die Eintragung der Angaben für Rhenium erweitert.)

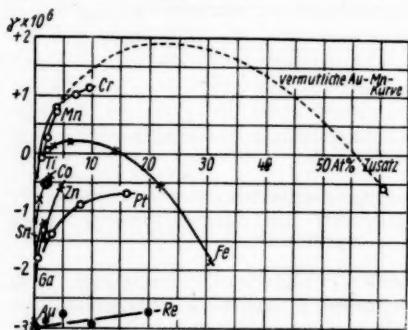


Abb. 4. Druckkoeffizient einiger Gold-Legierungen in Abhängigkeit vom Zusatz

dem Rheniumgehalt der Legierung werden die Werte, die alle negativ sind, betragsmäßig kleiner.

Bei den Temperaturkoeffizienten liegen die Werte für die reinen Metalle ( $3,78 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$  für Kupfer,  $3,56 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$  für Silber und  $3,48 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$

Die Werte für die reinen Metalle ( $-1,7 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-1}$  für 100% Kupfer;  $-3,5 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-1}$  für 100% Silber und  $-3,0 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-1}$  für 100% Gold) stimmen mit den von H. Ebert und J. Gießen <sup>6)</sup> angegebenen Werten ( $-1,9 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-1}$  bzw.  $-3,0 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-1}$  und  $-2,9 \cdot 10^{-6} \text{ at}^{-1}$ ) innerhalb der Meßunsicherheit überein. Die Werte für die Legierungen schließen an die Werte für die reinen Metalle stetig an und weichen nur wenig von diesen Werten ab. Mit zunehmendem Zusatz von Rhenium wird der Druckkoeffizient negativer.

für Gold) insgesamt tiefer als die in der Literatur<sup>4)</sup>, S. 2 und <sup>8)</sup> angegebenen Werte ( $4,33 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$  bzw.  $4,10 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$  und  $3,98 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$ ); diese Abweichungen lassen sich als Folge des geringeren Reinheitsgrades der uns zur Verfügung stehenden reinen Metalle erklären. Mit zunehmendem Rheniumgehalt werden die Werte kleiner. Im Hinblick auf die Unsicherheit von  $\pm 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$  für die Werte der Temperaturkoeffizienten kann aber die ermittelte Abnahme der Werte um 0,1 bis  $0,3 \cdot 10^{-3} \text{ grd}^{-1}$  für die Legierungen mit 30 At.-% (bei Gold mit 20 At.-%) nicht als sehr deutlich gelten.

Als Nebenergebnis wurden bei der Feinstruktur-Untersuchung<sup>9)</sup> der Legierungen von Silber mit 10 und 30 At.-% Rhenium Interferenzlinien gefunden, die auf Mischkristallbildung schließen lassen, während bei den übrigen Legierungen Mischkristallbildung nicht bemerkt wurde.

<sup>8)</sup> F. Kohlrausch, Praktische Physik, Band 2, 20. Aufl. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1956, S. 669, Tabelle 76a<sub>1</sub> (die Quellen sind hier zitiert).

<sup>9)</sup> Herrn Prof. F. Günther, Institut für Metallkunde und Materialprüfung der Bergakademie Freiberg, sind wir für die Durchführung und Auswertung der Untersuchungen, die mit einem Zählrohr-Goniometer nach Berthold erfolgten, zu Dank verpflichtet.

Berlin, Physikalisch-Technisches Zentralinstitut des Deutschen Amtes für Maß und Gewicht.

Bei der Redaktion eingegangen am 28. Februar 1961.

VB  
Ver  
Red  
ten

## Die Berechnung von $C^{13}$ -H- und H-H-Kernspinkopplungskonstanten von Äthan und Äthylen mit Hilfe von Valenzbindungeigenfunktionen

Von J. Ranft

### Inhaltsübersicht

Es werden die H—H- und  $C^{13}$ —H-Kernspinkopplungskonstanten von äthan- und äthylenartigen Verbindungen mit Hilfe der Formeln von Karplus und von Hiroike berechnet. Zur Berechnung werden die korrigierten VB-Funktionen von Karplus verwendet. Die erhaltenen H—H-Kopplungskonstanten zeigen die richtige Abhängigkeit von der Polarität der Bindung. Die  $J_{C^{13}-C-H}$ -Kopplungskonstanten ergeben sich in der zu erwartenden Größe.

### Einleitung

Durch die Verbesserung der Kernresonanzapparaturen wird es in zunehmendem Maße möglich, die indirekten Kernspinkopplungskonstanten zwischen den Protonen und den  $C^{13}$ -Kernen in organischen Verbindungen auch an nicht mit  $C^{13}$  angereicherten Verbindungen zu messen<sup>1-4</sup>). Bisher beschäftigte man sich im wesentlichen mit Kopplungskonstanten über nur eine C—H-Bindung. Es zeigte sich<sup>2)3)5)</sup>, daß diese Kopplungskonstanten in Kohlenwasserstoffen ein direktes Maß für den *s*-Charakter der Bindungseigenfunktionen am Ort des  $C^{13}$ -Kernes sind, also insbesondere charakteristische Werte für die verschiedenen Hybridisierungszustände der C-Atome zeigen. In substituierten Molekülen zeigt sich weiterhin ein starker Einfluß des Substituenten auf die Größe der  $J_{C^{13}-H}$ -Kopplungskonstante. Es wurde gezeigt<sup>4)</sup>, daß die Verwendung von C-Eigenfunktionen nach Morse, Joung und Haurwitz<sup>6)</sup> zum Aufbau der VB-Bindungseigenfunktionen bei der Berechnung der  $C^{13}$ —H-Kopplungskonstanten zwischen direkt gebundenen Atomen zu befriedigenden Ergebnissen führt.

Von Karplus und Anderson wurde gezeigt<sup>7)8)</sup>, daß sich die H—H-Kopplungskonstanten in Methan, Äthan, Äthylen und ähnlichen Systemen in guter Übereinstimmung mit den experimentell beobachteten Werten mit Hilfe von

- <sup>1)</sup> P. C. Lauterbur, Ann. NY Acad. Sci. **70**, 841, (1958).
- <sup>2)</sup> N. Muller u. D. E. Prichard, J. chem. Physics **31**, 768 (1959).
- <sup>3)</sup> N. Muller u. D. E. Prichard, J. chem. Physics **31**, 1471 (1959).
- <sup>4)</sup> J. Ranft, Arbeitstagung Hochfrequenzspektroskopie, April 1960, Leipzig
- <sup>5)</sup> J. N. Shoolery, J. chem. Physics **31**, 1427 (1959).
- <sup>6)</sup> P. M. Morse, L. A. Young u. E. S. Haurwitz, Physic. Rev. **48**, 948 (1935).
- <sup>7)</sup> M. Karplus u. D. H. Anderson, J. chem. Physics **30**, 6 (1959).
- <sup>8)</sup> M. Karplus, J. chem. Physics **30**, 11 (1959).

VB-Eigenfunktionen erklären lassen. Ähnliche Rechnungen, aber mit weniger Vernachlässigungen, wurden von Hiroike<sup>9)</sup> für Methan durchgeführt. Diese Rechnungen ließen die Berechnung der entfernten  $C^{13}$ -H-Kopplungskonstanten für diese Systeme aussichtsreich erscheinen.

### 1. Die Berechnung der Kopplungskonstanten mit Hilfe von VB-Eigenfunktionen

Die Grundlage für die Berechnung ist der Ausdruck, den Ramsey<sup>10)</sup> mit Hilfe der Störungstheorie 2. Ordnung erhielt. Für Kopplungen zwischen Protonen genügt es, nur den Term  $J_3$ , der mit Hilfe des Fermischen Operators für die Hyperfeinstrukturkopplung hergeleitet wurde, zu berücksichtigen.

$$J_{3NN'} = -\frac{2}{3\hbar} \left(\frac{8\beta\hbar}{3}\right)^2 \gamma_N \gamma_{N'} \frac{1}{4E} \langle \Psi | \sum_{ij} \delta(\mathbf{r}_{iN}) \delta(\mathbf{r}_{jN'}) S_i S_j | \Psi \rangle. \quad (1)$$

Die Ergebnisse für die  $J_{HC^{13}}$ -Konstanten zwischen direkt gebundenen Kernen legen die Annahme nahe, daß dieser Term auch eine gute Näherung für die Kopplungskonstanten zwischen H und  $C^{13}$  darstellt.

Karplus und Anderson<sup>7)</sup> führten für die Grundzustandswellenfunktion  $\Psi$  eine VB-Funktion ein:

$$\Psi = \sum_i c_i \psi_i, \quad (2)$$

wobei  $\psi_i$  die kanonischen VB-Strukturen sind

$$\Psi = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_R (-1)^R R \frac{1}{(2n)!^{1/2}} \sum_P (-1)^P P a(1) \beta(1) b(2) \alpha(2) \dots 2n(2n) \alpha(2n). \quad (3)$$

Dabei stellt  $P$  die  $(2n)!$  Vertauschungen der Elektronen zwischen den Bahn- und Spineigenfunktionen und  $R$  die  $2^n$  Vertauschungen von  $\alpha$  und  $\beta$  für die jeweils gebundenen Eigenfunktionen dar. Damit erhielten sie unter Vernachlässigung der Überlappungsintegrale und der Ionenterme folgenden Ausdruck für die Kopplungskonstante:

$$J_{NN'} = \frac{1}{4AE} \frac{2}{3\hbar} \left(\frac{16\pi\beta\hbar}{3}\right)^2 \gamma_N \gamma_{N'} \Phi_N^2(0) \Phi_{N'}^2(0) \sum_{ii} c_{ii} \frac{1}{2^{n-i_1}} [1 + 2f_{ii}(P_{NN'})]. \quad (4)$$

Dabei ist  $n$  die Anzahl der Bindungen im Molekül,  $i_1$  die Anzahl der Inseln im Überlagerungsbild der beiden Rumer-Paulingschen Strichschemata<sup>11)</sup>,  $P_{NN'}$  ist die Anzahl der Striche zwischen  $N$  und  $N'$  im Überlagerungsbild der beiden Strukturen und  $f_{ii}(P_{NN'}) = -1/2, 1, -2$ , für  $P_{NN'} = 0, 2n-1, 2n$ .

Hiroike ging ebenfalls von (1) aus, verwendete aber die VB-Funktion in etwas anderer Form. Für die Zweielektroneneigenfunktionen der chemischen Bindungen nahm sie folgende Form an:

$$\Phi_{bd} = N(bd) [b(1)d(2) + d(1)b(2) + I_b b(1)b(2) + I_d d(1)d(2)] \quad (5)$$

$I_b$  und  $I_d$  sind dabei die Koeffizienten der Ionenterme. Die einzelnen kanonischen Strukturen werden wie folgt charakterisiert: Die Struktur mit den Bindungen entsprechend der chemischen Strukturformel als  $\psi_0$ , alle anderen

<sup>9)</sup> E. Hiroike, J. Phys. Soc. Japan **15**, 270 (1960).

<sup>10)</sup> N. F. Ramsey, Physic. Rev. **91**, 303 (1953).

<sup>11)</sup> L. Pauling, J. chem. Physics **1**, 280 (1933).

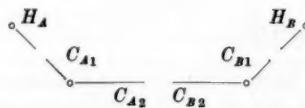
als  $\psi_{M\lambda a}$  oder  $\psi_{M\lambda b}$ .  $M$  gibt dabei die Anzahl der „nichtchemischen“ Bindungen in der betreffenden Struktur an,  $\lambda$  ist die Anzahl der Polygone (mit mehr als 2 Seiten) im Überlagerungsbild der Struktur mit  $\psi_0$  und  $a$  und  $b$  zeigen an, ob  $N$  und  $N'$  in der Struktur direkt gebunden sind oder nicht. Hiroike erhält damit folgende Formel für die Kopplungskonstante:

$$J_{NN'} = -\frac{2}{3\hbar} \left(\frac{8\beta\hbar}{3}\right)^2 \gamma_N \gamma_{N'} \frac{1}{\Delta E} \left( 2c_0 \sum_{M\lambda a} c_{M\lambda a} Q_{M\lambda a,0} + c_0^2 Q_{0,0} \right. \\ \left. + 2c_0 \sum_{M\lambda b} c_{M\lambda b} Q_{M\lambda b,0} + \sum_{M\lambda a, M'\lambda' a} c_{M\lambda a} c_{M'\lambda' a} Q_{M\lambda a, M'\lambda' a} \right. \\ \left. + 2 \sum_{M\lambda a, M\lambda b} c_{M\lambda a} c_{M\lambda b} Q_{M\lambda a, M\lambda b} + \sum_{M\lambda b, M'\lambda' b} c_{M\lambda b} c_{M'\lambda' b} Q_{M\lambda b, M'\lambda' b} \right). \quad (6)$$

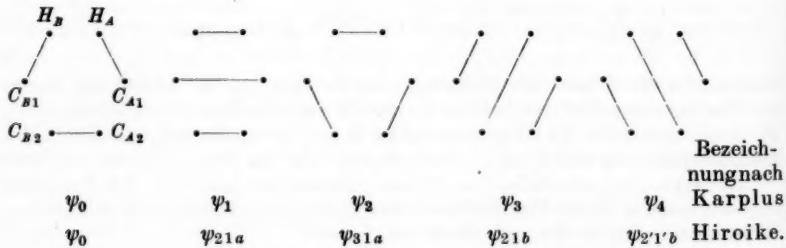
Die  $c_i$  sind dabei die Koeffizienten der einzelnen Strukturen in der Grundzustandswellenfunktionen des Moleküls. Wegen der Ausdrücke für die  $Q_{ij}$  muß auf die Arbeit von Hiroike verwiesen werden.

## 2. Die verwendeten VB-Eigenfunktionen

Karplus berechnete Grundzustands-VB-Eigenfunktionen für folgendes Sechselektronensystem:



Für dieses System gibt es 5 kanonische Strukturen.



Zur Kopplungskonstante zwischen den Protonen tragen dabei  $\psi_{1(21a)}$  und in geringerem Maße  $\psi_{2(31a)}$ , die Strukturen mit direkter  $H_A-H_B$ -Bindung, den größten Anteil bei.

Die Koeffizienten der 5 Strukturen wurden dabei in Abhängigkeit vom Winkel  $\phi$  zwischen den  $A C_A C_B$ - und  $B C_B C_A$ -Ebenen für Äthan und Athylen berechnet. Diese Koeffizienten sind in Tab. 1 angegeben. Weiterhin wurden in Tab. 1 die Werte  $J_{HH'}$ , die sich daraus nach Formel (4) ergeben, mit angeführt.

Tabelle 1  
Koeffizienten der Strukturen 0-4 in den Grundzustandswellenfunktionen<sup>a)</sup>

	$\Phi$	$C_0$	$C_1$ *)	$C_2$ *)	$C_3$	$C_4$	$J_{HH'}$ (Hz)
Äthan	0°	1,013	0,0168	0,0010	-	0,0217	8,2
	30°	1,015	0,0120	0,0012	-	0,0217	6,0
	60°	1,020	0,0026	0,0016	-	0,0217	1,7
	90°	1,022	-0,0016	0,0017	-	0,0217	-0,28
	120°	1,019	0,0037	0,0015	-	0,0217	2,2
	150°	1,014	0,0140	0,0011	-	0,0217	6,9
	180°	1,011	0,0191	0,0009	-	0,0216	9,2
Äthylen	0°	1,001	0,0145	0,0004	-	0,0080	6,1
	180°	0,995	0,0252	0,0002	-	0,0080	11,9

\*) In der von Karplus angegebenen Tabelle sind offenbar  $C_1$  und  $C_2$  und das Vorzeichen von  $C_1$  (90°) vertauscht. Man erhält mit den hier angegebenen  $C_1$ -Werten die von ihm berechneten Kopplungskonstanten.

### 3. Berechnung der $J_{HH'}$ -Kopplungskonstanten von Äthan und Äthylen nach Hiroike

Zur weiteren Untersuchung dieser VB-Funktionen werden die  $J_{HH'}$ -Kopplungskonstanten von Äthan und Äthylen mit Hilfe der Theorie von Hiroike unter Berücksichtigung der Ionenanteile an den C-H-Bindungen und der Überlappung berechnet. Für derartige Systeme sind schon relativ viele experimentelle  $J_{HH'}$ -Kopplungskonstanten bekannt, die ungefähr die von Karplus berechnete Abhängigkeit vom Winkel  $\Phi$  zeigen, aber allgemein etwas größer als die berechneten Werte sind. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Tab. 2 angeführt. Der Wert  $\Delta E$  wurde hier wie bei allen anderen Berechnungen als  $g$  eV angenommen<sup>7)</sup><sup>8)</sup>. Die verwendeten Überlappungsintegrale wurden mit Hilfe von Slatereigenfunktionen berechnet bzw. aus der Tafel von Kotani und Amemija<sup>12)</sup> entnommen.

Hiroike hatte die beste Übereinstimmung mit dem Experiment bei Methan für  $I_e = 0,2$  gefunden. Wahrscheinlich muß  $I_e$  aber etwas größer angenommen werden. Die Kopplungskonstanten in Tab. 2 sind gegenüber den experimentellen Werten ebenfalls zu klein und zeigen ebenfalls die richtige  $\Phi$ -Abhängigkeit bei Äthan. Das Verhältnis der trans- zur cis-Kopplungskonstanten bei Äthylen ist gegenüber den experimentellen Werten zu klein und auch kleiner als in Tab. 1\*).

Tabelle 2  
Kopplungskonstanten  $J_{HH'}$  von Äthan und Äthylen, berechnet nach Formel (6) von Hiroike in Hz

	$\Phi$	$I_e = 0,3$	0,2	0,1
Äthan	0°	7,1	7,8	8,6
	30°	5,1	5,6	6,1
	60°	1,1	1,2	1,4
	90°	-0,8	-0,9	-1,0
	120°	1,2	1,3	1,4
	150°	5,2	5,7	6,3
	180°	7,3	7,9	8,7
Äthylen	0°	6,5	7,3	8,0
	180°	9,3	10,2	11,1

12) M. Kotani u. A. Amemija, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 22, Extra 1940.

\*) Die in Tabelle 2 angegebenen  $J_{HH'}$ -Kopplungskonstanten zeigen weiterhin die richtige Abhängigkeit von der Polarität der CH-Bindung, wie sie in substituierten Molekülen beobachtet wird. Diese Abhängigkeit wird in einer folgenden Arbeit genauer untersucht.

#### 4. Die Berechnung der entfernten $J_{\text{C}^{\text{14}}-\text{H}}$ -Kopplungskonstanten von Äthan und Äthylen

Die entfernten  $J_{\text{C}^{\text{14}}-\text{H}}$ -Kopplungskonstanten von Äthan und Äthylen wurden mit Hilfe derselben  $VB$ -Eigenfunktionen nach den beiden Verfahren berechnet. Zur Berechnung der  $J_{\text{C}^{\text{14}}-\text{H}}$ -Kopplungskonstanten ist natürlich die obige Sechselektronenfunktion weniger gut geeignet als für die  $J_{\text{H}-\text{H}}$ -Kopplungskonstante, da die Kopplung zweifellos über alle 4 bzw. 3 (Äthan bzw. Äthylen) Kohlenstoffhybridfunktionen vermittelt wird. Es soll deshalb im Rahmen der obigen  $VB$ -Funktionen die  $J_{\text{C}^{\text{14}}-\text{H}}$ -Kopplungskonstante als eine Summe der Teilkopplungskonstanten  $J_{H_A c_B}$  und der 3 bzw.  $2 J_{H_A c_B}$  zusammengesetzt werden. Die  $J_{H_A c_B}$  müssen dabei natürlich für die richtigen  $\Phi$ -Winkel verwendet werden.

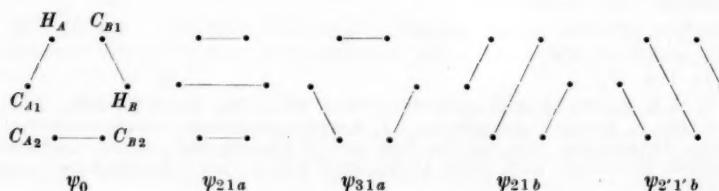
Die Formel (4) von Karplus und Anderson<sup>7)</sup> gestattet die Berechnung von  $J_{H_A c_B}$  und  $J_{H_A c_B}$ , ohne weitere Änderungen an den Eigenfunktionen. Die verwendeten  $C$  Atomeigenfunktionen sind die von Morse, Young und Haurwitz<sup>8)</sup> angegebenen.

In Tab. 3 sind die damit erhaltenen Ergebnisse angeführt. Aus Symmetriegründen sollte  $J_{H_A c_B}$ , unabhängig von  $\Phi$  sein oder zumindest für Äthan eine Periode von  $120^\circ$  zeigen. Die berechneten Werte sind tatsächlich nahezu konstant. Aus diesen Werten sind sofort die  $J_{\text{C}^{\text{14}}-\text{H}}$ -Kopplungskonstanten für verschiedene Drehwinkel der beiden  $\text{CH}_3$ -Gruppen in Äthan und der Wert für Äthylen zu berechnen. Die Werte für  $J_{\text{C}^{\text{14}}-\text{H}}$  von Äthan zeigen ebenfalls die richtige Periodizität in  $120^\circ$ .

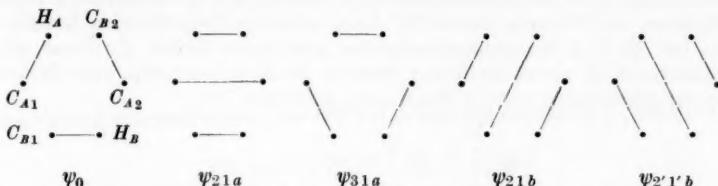
Tabelle 3  
 $J_{H_A c_B}$  von Äthan und Äthylen, berechnet nach  
 Formel (4) in Hz

		$J_{H_A c_B}$	$J_{H_A c_B}$	$J_{H_A c_B}$
Äthan	$0^\circ$	-2,5	-3,1	-7,0
	$30^\circ$	-1,9	-3,1	-7,0
	$60^\circ$	-0,5	-3,0	-6,8
	$90^\circ$	+0,1	-3,0	-6,9
	$120^\circ$	-0,7	-3,0	-6,9
	$150^\circ$	-2,1	-3,1	-7,0
	$180^\circ$	-2,8	-3,1	-6,9
Äthylen	$0^\circ$	-2,8	-1,5	-9,2
	$180^\circ$	-4,9	-1,5	-9,2

man vorher jeweils fünf andere kanonische Strukturen einführen, und zwar so, daß die beiden zu koppelnden Eigenfunktionen im Rumer-Paulingschen Strichschema jeweils benachbart sind. Die  $VB$ -Funktionen müssen dann als Linearkombination dieser neuen Strukturen ausgedrückt werden. Diese Forderung erfüllen für  $J_{H_A c_B}$ , die Strukturen



und für  $J_{H_A C_B}$ , die Strukturen



Sind diese Strukturen eingeführt, dann kann die Rechnung ohne weiteres durchgeführt werden. In Tab. 4 sind die Ergebnisse für die  $I_c$ -Werte 0,3, 0,2 und 0,1 angegeben.  $I_H$  wurde 0 gesetzt. Die errechneten Werte sind fast unabhängig von  $I_c$ . Die relativen Größen und die Winkelabhängigkeit ergeben sich ähnlich wie in Tab. 3. Die Kopplungskonstanten sind lediglich durchweg etwas kleiner.

Tabelle 4  
 $J_{H_A C_B}$  berechnet nach Formel (6) in Hz

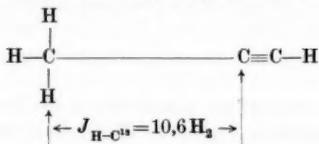
		Äthan							Äthylen	
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	0°	180°
$I_c = 0,3$	$J_{H_A C_{B_1}}$	-1,3	-0,8	+0,1	+0,4	-0,5	-1,8	-2,5	-1,8	-3,9
	$J_{H_A C_{B_2}}$	-2,4	-2,3	-2,2	-2,2	-2,2	-2,4	-2,4	-1,2	-1,3
	$J_{H_A C_B}$	-4,7	-4,5	-4,5	-4,4	-4,5	-4,6	-4,7	-6,9	-7,0
$I_c = 0,2$	$J_{H_A C_{B_1}}$	-1,3	-0,8	+0,2	+0,1	-0,4	-1,9	-2,5	-1,9	-3,8
	$J_{H_A C_{B_2}}$	-2,6	-2,6	-2,4	-2,4	-2,5	-2,6	-2,7	-1,3	-1,4
	$J_{H_A C_B}$	-4,7	-4,8	-4,5	-4,6	-4,6	-4,8	-4,8	-7,0	-7,1
$I_c = 0,1$	$J_{H_A C_{B_1}}$	-1,4	-0,8	+0,2	+0,1	-0,4	-1,8	-2,5	-2,0	-3,7
	$J_{H_A C_{B_2}}$	-2,9	-2,9	-2,7	-2,7	-2,7	-2,9	-2,9	-1,4	-1,5
	$J_{H_A C_B}$	-5,1	-5,0	-4,8	-4,8	-4,9	-5,0	-5,0	-7,1	-7,2

### 5. Diskussion der Ergebnisse

Die Rechnung führte zu Aussagen über die Größe der entfernten  $J_{HC}$ -Kopplungskonstanten für Äthan und Äthylen oder ähnlicher Systeme. Leider wurden bisher noch keine derartigen Kopplungskonstanten gemessen\*\*). Das liegt daran, daß es bei der bei den  $C^{13}$ -Resonanzexperimenten mit nichttangereicherten Substanzen verwendeten Nachweistechnik wahrscheinlich nicht möglich ist, derartig kleine Aufspaltungen nachzuweisen. Bei Protonenresonanzexperimenten liegen aber die beiden schwachen  $C^{13}$ -Satelliten infolge der Kopplungen mit den entfernten  $C^{13}$ -Kernen wahrscheinlich schon im Linienanstieg der zen-

\*\*) Während der Drucklegung erschien die Arbeit von Karabatos [J. Am. Chem. Soc. 83, 1230 (1961)], in der erstmalig die  $HC^{13}$ -Kopplungskonstanten über zwei Bindungen gemessen wurden. Die experimentellen Werte liegen mit  $J_{CH} = 4,1 - 5,6$  Hz im Bereich der in Tabelle 4 für äthanähnliche Systeme angegebenen Werte (-4,5 bis -5,1 Hz).

tralen Linie und sind deshalb schwer nachzuweisen. Zur Verteidigung der berechneten Werte läßt sich aber erstens anführen, daß die verwendeten Wellenfunktionen und Formeln sowohl für  $J_{C^{14}-H}$  zwischen benachbarten Kernen als auch für die  $J_{H-H'}$ -Kopplungskonstanten gute Werte liefert. Zweitens wurde experimentell in einem ähnlichen System, in Methylacetylen, eine derartige Kopplungskonstante über 2 Bindungen gemessen<sup>13).</sup>



Diese Konstante liegt mit 10,6  $H_2$  in der Nähe der berechneten Werte. Die verwendete  $VB$ -Eigenfunktion ist aber auf diesen Fall nicht anwendbar. Außerdem tragen möglicherweise die  $\pi$ -Elektronen zum Teil zur Kopplung bei<sup>14).</sup>

Ich danke Herrn Prof. Dr. Lösche für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und für die von ihm erhaltenen Anregungen.

---

<sup>13)</sup> J. N. Shoolery, L. F. Johnson u. W. A. Anderson, J. Mol. Spectr. 5, 110 (1960)  
<sup>14)</sup> M. Karplus, J. chem. Physics 33, 1842 (1960).

Leipzig, Physikalisches Institut der Karl-Marx-Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 3. März 1961.

g der  
ellen-  
en als  
wurde  
artige

Die  
über-  
rei<sup>14</sup>).

achte

1960)

## Über die Lebensdauer des $6^3P_1$ -Terms im Barium I-Spektrum

Von H. Bucka und H. H. Nagel

Mit 1 Abbildung

### Inhaltsübersicht

Aus der Linienbreite des mit Doppelresonanztechnik gemessenen Hochfrequenzübergangs zwischen den Zeemanniveaus des  $6^3P_1$ -Terms der geraden Barium-Isotope wird die mittlere Lebensdauer dieses Zustandes zu

$$T = (1,21 \pm 0,12) \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

bestimmt.

### Einleitung

Die mittlere Lebensdauer  $T$  eines angeregten Feinstrukturterms eines Atoms kann in günstigen Fällen mit Hilfe der Doppelresonanzmethode<sup>1)</sup> aus der Linienbreite der Hochfrequenzübergänge zwischen den Zeemanniveaus des Feinstrukturterms bestimmt werden. Für kleine Hochfrequenzfeldstärken, bei denen die Hochfrequenzverbreiterung vernachlässigt werden kann, ist die Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  der Resonanzkurve mit der mittleren Lebensdauer  $T$  durch die Beziehung  $\Delta\nu = 1/(\pi \cdot T)$  verknüpft.

Der  $6^3P_1$ -Term im Barium I-Spektrum kann durch Absorption der Interkombinationslinie  $\lambda = 7911 \text{ \AA}$  ( $6^1S_0 - 6^3P_1$ ) vom Grundzustand erreicht werden (Abb. 1). Die Absorptionsoszillatorenstärke dieser Linie, die mit  $f_r$  bezeichnet sei, berechnet sich aus der Absorptionsoszillatorenstärke für die Resonanzlinie  $\lambda = 5535 \text{ \AA}$  ( $6^1S_0 - 6^1P_1$ ) mit dem Wert  $f_r = 1,32 \pm 0,15$ <sup>2)</sup> und dem Verhältnis  $f_r/f_i = 146 \pm 2$ <sup>3)</sup> zu  $f_i = 0,0090 \pm 0,0011$ . Die Lebensdauer des  $6^3P_1$ -Terms ist jedoch hiermit nicht völlig bestimmt, da von diesem noch Emissionsübergänge mit  $\lambda = 29222 \text{ \AA}$  in den Term  $6s5d^3D_2$  und mit  $\lambda = 27750 \text{ \AA}$  in den Term  $6s5d^3D_1$  möglich sind. Für die Lebensdauer  $T$  des  $6^3P_1$ -Terms ergibt

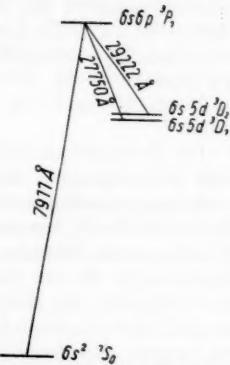


Abb. 1. Die vom  $6s6p^3P_1$ -Term im Ba I-Spektrum ausgehenden Spektrallinien

<sup>1)</sup> A. Kastler u. J. Brossel, C. R. Acad. Sci. Paris **229**, 1213 (1949); J. Brossel u. F. Bitter, Physic. Rev. **86**, 308 (1952); A. Kastler, J. Opt. Soc. Amer. **47**, 460 (1957).

<sup>2)</sup> H. Bucka u. H. J. Schüssler, Ann. Physik **7**, 225 (1961). Um dem in der zitierten Arbeit nicht berücksichtigten geringen Einfluß des Übergangs  $6^1P_1 - 5^1D_2$  Rechnung zu tragen, sind für  $f_r$  oben die Fehlergrenzen auf  $\pm 0,15$  erhöht.

<sup>3)</sup> W. Prokofjew, Z. Physik **50**, 701 (1928).

sich aus  $f_i$ , daß  $T \leq (3,07 \pm 0,40) \cdot 10^{-6}$  sec sein sollte. In dieser Arbeit wird die Lebensdauer des  $6^3P_1$ -Terms mit Hilfe eines Doppelresonanzexperiments bestimmt.

### Experimentelle Anordnung

Zur Anregung des  $^3P_1$ -Terms des Ba  $I$ -Spektrums wurde das von einer Hohlkathode ausgehende Licht der Interkombinationslinie  $\lambda = 7911 \text{ \AA}$  in einen Ba-Atomstrahl abgebildet, wobei die Einstrahlrichtung parallel zu einem die Zeemanauflösung bewirkenden äußeren Magnetfeld  $H_0$  und senkrecht zur Flugrichtung der Atome erfolgte. Hochfrequenzübergänge zwischen den Zeemanniveaus des  $^3P_1$ -Zustandes, von denen infolge der benutzten Geometrie die Niveaus mit  $m_J = \pm 1$  besetzt waren, führten in bekannter Weise<sup>1)</sup> im Resonanzfall zur Besetzung des Zeemanniveaus mit  $m_J = 0$  und konnten an der Änderung des Polarisationsgrades der Resonanzstrahlung nachgewiesen werden. Das hochfrequente Magnetfeld  $H_1$  war niederfrequent moduliert; das Signal wurde nach phasenempfindlicher Gleichrichtung (lock-in) mit einem Schreiber registriert.

Zur Atomstrahlanordnung: Als Atomstrahlofen diente ein aus V2A Stahl angefertigter Behälter, der in einem mit einer bifilaren Heizwicklung versehenen Lavarohr stand und von einer Strahlungsblende aus Tantalblech umgeben war. Auf einer Messingblende, die an drei Halterungen fest mit dem wassergekühlten Mantel der Vakuumapparatur verschraubt war, war eine Klappe angeordnet, mit deren Hilfe der Atomstrahl aus dem optischen Strahlengang entfernt werden konnte. Für den Strahlengang des anregenden Lichts und des Resonanzlichts waren Fenster von 6 cm Durchmesser vorgesehen.

Zur Messung des Resonanzlichts diente ein mit flüssiger Luft gekühlter Infrarotmultiplier (C 7160, RCA). Vor dem Multiplier befand sich ein Interferenzfilter für 7920  $\text{\AA}$  mit 170  $\text{\AA}$  Halbwertsbreite und ein Infrarotpolarisationsfilter. Das äußere Magnetfeld  $H_0$  ( $\approx 5$  Oe) wurde von einem Helmholtzspulenpaar erzeugt. Die relative Inhomogenität des Magnetfeldes  $H_0$  war bis zu einem Abstand von 2 cm vom Mittelpunkt der Spulenanordnung kleiner als  $10^{-3}$ .

Die Hohlkathode enthielt als Kathodeneinsatz massives Bariummetall mit einer Bohrung von 7 mm Durchmesser und 11 mm Tiefe.

Bei der Messung der Resonanzkurven wurde die Frequenz des magnetischen Wechselfeldes  $H_1$  konstant gehalten, während das äußere Magnetfeld  $H_0$  für die punktweise Vermessung der Resonanzkurve schrittweise verändert wurde. Relativwerte für die Feldstärke  $H_1$  des magnetischen Wechselfeldes wurden durch Messung der elektrischen Hochfrequenzfeldstärke mit Hilfe einer Spitzengleichrichtungsanordnung gewonnen. Die ersten erhaltenen Resonanzkurven zeigten eine deutliche Einsattelung, die durch Verringerung der magnetischen Hochfrequenzfeldstärke  $H_1$  vermieden werden konnte. Sämtliche Messungen wurden bei Hochfrequenzfeldstärken  $H_1$  durchgeführt, bei denen keine Einsattelung der Resonanzkurven beobachtet worden war.

### Gang der Auswertung

Zur Bestimmung der Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  wurde die Resonanzkurve jeweils aus 7 Meßpunkten konstruiert und  $\Delta\nu$  durch graphische Interpolation ermittelt. Die Messungen wurden bei drei Frequenzen (7 MHz, 8 MHz und 9,7 MHz) für

jeweils vier verschiedene Werte der magnetischen Hochfrequenzfeldstärke  $H_1$  vorgenommen.  $H_1$  wurde im Verhältnis 3:2,1:1,5:1 verändert, wobei die für die einzelnen Frequenzen verwendete maximale Hochfrequenzfeldstärke  $H_1$  etwas verschieden war. Die in Magnetfeldeinheiten erhaltenen Halbwertsbreiten sind, auf Frequenzeinheiten umgerechnet, in Tab. 1 wiedergegeben.

Tabelle 1  
Halbwertsbreite der Resonanzkurve  $\Delta\nu$  (in kHz) als Funktion der Hochfrequenzfeldstärke  $H_1 = c_i \cdot x$  bei drei verschiedenen Zeemanfrequenzen  $\nu_i$  (in MHz). Die Konstante  $c_i$  war für jede der drei Frequenzen etwas verschieden

$\nu_i \backslash x$	1,0	1,5	2,1	3,0
7,000	281	288	317	363
8,006	276	287	310	344
9,707	263	271	286	320

Jede der angegebenen Halbwertsbreiten  $\Delta\nu$  wurde als Mittelwert von durchschnittlich sechs Meßkurven gewonnen. Für das Quadrat der Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  der Resonanzkurve gilt<sup>4)</sup> bei kleinen Hochfrequenzfeldstärken  $H_1$ :

$$(\Delta\nu)^2 = \left(\frac{1}{\pi T}\right)^2 [1 + 5,8 (\gamma H_1 T)^2]$$

wobei  $T$  die mittlere Lebensdauer und  $\gamma = g_j \mu_B H / \hbar$  das gyromagnetische Verhältnis des  $3^3P_1$ -Terms bedeuten. ( $\mu_B$  = Bohrsches Magneton,  $\hbar$  = Planck'sches Wirkungsquantum,  $g_j$  = Landé'scher  $g$ -Faktor). Die Extrapolation von  $(\Delta\nu)^2$  für  $H_1^2 = 0$  führt zu der Halbwertsbreite

$$\Delta\nu = (263 \pm 25) \text{ kHz.}$$

Die Hälfte des angegebenen Fehlers entspricht der Streuung der für  $H_1^2 = 0$  extrapolierten Werte von  $\Delta\nu^2$ , der Rest ist durch die Genauigkeit des Umrechnungsfaktors vom Magnetfeld  $H_0$  auf Frequenzen und durch die Inhomogenität des Magnetfelds  $H_0$  bedingt. Für die mittlere Lebensdauer  $T$  des  $6^3P_1$ -Terms ergibt sich aus  $\Delta\nu$

$$T = (1,21 \pm 0,12) \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Die gemessene Lebensdauer  $T$  des  $6^3P_1$ -Terms ist außerhalb der Fehlergrenzen um den Faktor 2,5 kleiner als diejenige, die sich aus der Oszillatorenstärke der Interkombinationslinie bei ausschließlicher Berücksichtigung des Zerfalls in den Grundzustand  $6^1S_0$  ergeben würde. Die Lebensdauer des  $6^3P_1$ -Terms erscheint somit wesentlich mitbestimmt durch die erlaubten Übergänge in die beiden tieferliegenden Terme  $6s5d$   $3^3D_{1,2}$ . Die Summe der Emissionsoszillatorenstärken

<sup>4)</sup> J. Brossel u. F. Bitter, l. c.

torenstärken dieser beiden Übergänge lässt sich unter der Vereinfachung einer mittleren Wellenlänge von  $\lambda = 28400 \text{ \AA}$  für diese beiden Linien abschätzen zu 0,06.

Herrn Professor Dr. H. Kopfermann danken wir für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele anregende Diskussionen. Herr Gisbert zu Putlitz und Herr Moiz Rasivala halfen in dankenswerter Weise beim Zustandekommen des Experiments.

Heidelberg, Erstes Physikalisches Institut der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 13. März 1961.

G. I.

Ma

---

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigen-  
teil: DEWAG-Werbung Leipzig, Leipzig C 1, Friedrich-Ebert-Str. 110, Ruf 7851. Z. Z. gilt  
Anzeigenpreisliste 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salemonstr. 18 B, Fern-  
ruf: 27681, 27682. ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 193/61

VEB

## Das Zeit-Problem

Bericht über die Jahresversammlung der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina, 9.-12. Mai 1959 in Halle/Saale  
zusammengestellt von

Prof. Dr. RUDOLPH ZAUNICK Halle/Saale

(Bildet: NOVA ACTA LEOPOLDINA Abhandlungen der Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina. Neue Folge, Band 21 [1959], Nr. 143)

313 Seiten mit 21 Bildnissen, 94 Abbildungen und 19 Tabellen im Text.

1959. 4°. DM 15,40

Der Bericht bringt alle auf der Jahresversammlung gehaltenen Ansprachen sowie folgende zehn Vorträge: Zeitmessung und Zeitbegriff in der Astronomie, Entwicklung im Weltall, Die Radioaktivität im Dienste der Zeitrechnung, Zeitfolgen in der Chemie, Kreislauf und Entwicklung in der Geschichte der Erdrinde, Gerichtete Entwicklung in der Geschichte der Erdrinde, Mutationsforschung in ihrer Bedeutung für die Evolution, Zeitliche Strukturen biologischer Vorgänge, Mechanismus und biologische Bedeutung der physiologischen Uhr, Sexnaldifferente Biomorphose der Menschen. Es folgen noch 22 Biographien der Empfänger der 1959 verliehenen Medaillen und der Darwin-Plakette.

JOHANN AMBROSIUS BARTH/VERLAG/LEIPZIG

G. RETTER

## Magnetische Felder und Kreise

Hochschulbücher für Physik, Bd. 23

Übersetzung aus dem Ungarischen

VIII/230 Seiten, etwa 180 Abbildungen, Gr. 8°, Kunstleder, etwa DM 23,—

In diesem Buch werden die Gesetze des Magnetismus und deren praktische Anwendungen ausführlich dargestellt. Es wird die Theorie erläutert, werden grundlegende Berechnungsmethoden angegeben und wird an Hand von Beispielen und Aufgaben auf die Betriebspraxis vorbereitet. Der Verfasser vermeidet eine strenge Trennung von Theorie und den jeweiligen Aufgaben. Obwohl die gewählten Aufgaben zum großen Teil Thema der Vorlesungen über Wechselströme sind, werden auch angrenzende Gebiete behandelt. Art und Umfang der Aufgaben sind unterschiedlich. Zum Teil handelt es sich um grundlegende Beispiele, zum Teil um Aufgaben, die selbständige Forschung erfordern. Vom Leser werden Kenntnisse der Grundlagen der Elektrotechnik vorausgesetzt, da dieses Rückblick und Ausblick bietende Buch nicht auf Einzelheiten eingeht.

Bestellungen beim Buchhandel erbeten

WEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN · BERLIN W 8

**Für Industrie, Wissenschaft und Forschung  
produzieren wir hochwertige Strahlungs-  
empfänger**

Photovervielfacher – Photowiderstände – Photozellen  
Photoelemente



Auf allen Gebieten der Photometrie, Szintillationsmeßtechnik,  
Kernphysik, Automatisierung, Beleuchtung und Lichttechnik  
wurden diese Präzisionsgeräte schon mit Erfolg eingesetzt.

Auskunft und Druckschriften erhalten Sie unter 47/Str./0

**VEB Carl Zeiss JENA**

K. K. AGLINZEW

## Dosimetrie ionisierender Strahlung

Scripta Biophysica, Bd. III

Übersetzung aus dem Russischen

XII, 522 Seiten, 374 Abbildungen, Gr. 8°, Kunstleder, etwa DM 58,—

Nach einer Darstellung der grundlegenden Wechselbeziehungen zwischen den verschiedenen praktisch in Frage kommenden Strahlenarten und der Materie und nach einer Darstellung der allgemeinen dosimetrischen Grundlagen werden Theorie und Praxis der verschiedenen Strahlendetektoren und dosimetrischen Verfahren behandelt. Der Autor geht ausführlich auf Strahlenatmosphären und dosimetrische Standardmethoden sowie auf Besonderheiten bei verschiedenen radioaktiven Strahlern und auf die bei Strahlungsgemischen auftretenden Meßprobleme ein. Die letzten Kapitel des Buches sind der Elektronik der Strahlenmeßgeräte, der praktischen Durchführung von Strahlenmessungen und den Grundlagen des Strahlenschutzes gewidmet.

Bestellungen beim Buchhandel erbeten

**VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN · BERLIN W 8**

---

Ab Juli 1961 erscheint eine neue Zeitschrift

## physica status solidi

Herausgeber

K. W. Böer, Berlin; W. Franz, Hamburg; P. Görlich, Jena; E. Grillot, Paris; R. Kaischew, Sofia; P. T. Landsberg, Cardiff; A. Piekarz, Poznan; N. Riehl, München; A. Seeger, Stuttgart; O. Stasiw, Berlin; M. Steenbeck, Jena; F. Stöckmann, Karlsruhe; G. Szigeti, Budapest; J. Tauc, Praha; W. Dekeyser, Gent.

Schriftleitung: K. W. Böer, Berlin C 2, Neue Schönhauser Straße 20.

Diese monatlich erscheinende Zeitschrift dient der möglichst schnellen Publikation von Erkenntnissen der Grundlagenforschung des Gesamtgebietes der Festkörperphysik.

Jedes Heft enthält zusammenfassende Berichte, Originalarbeiten, kurze Originalmitteilungen sowie Vorankündigungen der Titel und Abstracts von Originalarbeiten der in dieser sowie in der sowjetischen Zeitschrift *Fizika Tverdogo Tela* demnächst erscheinenden Arbeiten (letztere in englischer Übersetzung).

Je Heft etwa 80 Seiten, mit Abbildungen, DM 6,—

Bestellungen nimmt jede Buchhandlung entgegen

Ausführlicher Prospekt und Probeheft direkt vom

**AKADEMIE-VERLAG · BERLIN**

Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4

# Experimentelle Technik der Physik

Herausgegeben von A. Eckardt, P. Görlich und P. Kunze unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft in der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheint sechsmal im Jahr, Umfang je Heft etwa 50 Seiten, Preis je Heft DM 5,—

In dieser Zeitschrift werden vornehmlich Arbeiten aufgenommen, die sich mit allgemeiner experimenteller und angewandter Physik befassen. Hierzu kommen methodische Fragen für den experimentellen Unterricht, technologische Fragen für den Bau und Betrieb von Apparaturen und Geräten und grundsätzliche Untersuchungen über die Leistungsfähigkeit von Meßmethoden.

**VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN · BERLIN W 8**

*In Kürze erscheint:*

## Die elektroakustischen Wandler

Von Dr. phil. Dr. rer. nat. h. c. HEINRICH HECHT, Kiel

5., neubearbeitete Auflage

XXIV, 352 Seiten mit 62 Abbildungen im Text. 1961. gr. 8°

Etwa DM 36,—, Leinen etwa DM 38,—

**Elektrotechnische Zeitschrift:** Die Darstellung des Buches verrät die innige Vertrautheit des Verfassers mit dem behandelten Stoff, wie sie sich nur aus der vieljährigen praktischen Beschäftigung mit den Wandlerproblemen ergeben kann. Die Ausdrucksweise ist klar, präzise und so ausführlich, daß dem Leser das Verständnis des nicht immer leichten Stoffes nach Möglichkeit erleichtert wird. So wird auch die neue Auflage des Buches, das als ein Standardwerk auf diesem Gebiete angesehen werden kann, allen denen, die sich mit Wandlerfragen zu befassen haben, ein wertvoller Ratgeber sein.

W. Kallenbach

**JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**